Termodinámica

2^o curso de la Licenciatura de Físicas

Lección 11

- **Radiación del cuerpo negro**
- **Termodinámica del cuerpo negro**
- **Cálculo del número de modos por unidad de frecuencia**
- **Propiedades termodinámicas del cuerpo negro**
- **La radiación cósmica de fondo**

Radiación del cuerpo negro

- **Todo cuerpo a temperaturas por encima del cero absoluto emite radiación electromagnética. Esto es debido al movimiento de iónes o electrones del cuerpo que al ser partículas cargadas cumplen las ecuaciones de Maxwell y, por lo tanto, emiten campos eléctricos y magnéticos. Paralelamente, todo cuerpo puede absorber radiación electromagnética, típicamente aquella cuya longitud de onda es igual o similar a las longitudes típicas de vibración de la red subyacente o del recorrido libre medio de las partículas cargadas del cuerpo. En cualquier caso el espectro de emisión o de absorción de la radiación depende esencialmente de la estructura del cuerpo: un vidrio absorbe el espectro ultravioleta e infrarojo pero no el espectro visible, el carbón absorbe casi la totalidad de la radiación incidente (el $\simeq 97\%$).**

- **Se define como cuerpo negro a aquel que absorbe la totalidad de las radiaciones electromagnética que inciden sobre él. Además, si es capaz de absorber las radiaciones de todas las frecuencias, es capaz de emitir en todas ellas, asi que es un perfecto emisor de radiaciones.**

- **Una realización ideal de cuerpo negro es una caja con un agujero por el que toda radiación incidente queda absorbida. El espectro de emisión de un cuerpo negro es el de la radiación que se equilibra a la temperatura de la caja T y que sale por el agujero.**

- **Curiosamente las estrellas se comportan de forma aprox-**

imada a un cuerpo negro pues son capaces de absorber toda la radiación incidente y su espectro de emisión tiene propiedades parecidas a las del cuerpo negro. Además como veremos, el espectro de la radiación de fondo del universo coincide con la de un cuerpo negro.

Termodinámica del cuerpo negro

- Primero hemos de considerar un modelo de radiación que se basa en los siguientes puntos:
  - La radiación electromagnética se compone de un conjunto de cuasipartículas llamadas fotones.
  - Los fotones se comportan (en primera aproximación) como partículas independientes.
  - Cada fotón se caracteriza por tener una frecuencia ν y un nivel energético cuantizado, esto es que sólo puede tomar valores: $E = nh\nu$ donde n es un número natural y h es la llamada constante de Planck.
- Para obtener la termodinámica de un cuerpo negro hemos de considerar que:
  1. La radiación electromagnética se encuentra en equilibrio en el interior de la caja que, se supone es adiabática.
  2. El número de fotones de cierta frecuencia o el número total de fotones NO son variables termodinámicas.
- Vamos a seguir el razonamiento seguido por Planck (On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spec-

trum, Max Planck, Annalen der Physik vol. 4, p. 553 (1901)).

- **Supongamos que inicialmente consideramos que nuestro sistema está compuesto de N_ν fotones de frecuencia dada y con energía total U_ν. Puesto que consideramos que las energías de los fotones solo pueden tener valores enteros de $h\nu$, U_ν se debe poder escribir como:**

$$U_\nu = P\epsilon \tag{1}$$

donde $\epsilon = h\nu$ y P es un número natural.

- **Las variables macroscópicas termodinámicas son, en este momento, (U_ν, N_ν) y la entropía de este sistema termodinámico se haya utilizando la expresión de Boltzmann:**

$$S_\nu(U_\nu, N_\nu) = k_B \ln \Omega(U_\nu, N_\nu) \tag{2}$$

donde $\Omega(U_\nu, N_\nu)$ es el número de microestados compatibles con las macrovariables (U_ν, N_ν).

- **$\Omega(U_\nu, N_\nu)$ es equivalente a responder a la siguiente pregunta: ¿De cuantas formas se pueden repartir P cuantos de energía entre N_ν partículas? cuya solución es:**

$$\Omega(U_\nu, N_\nu) = \frac{(N_\nu - 1 + P)!}{(N_\nu - 1)!P!} \tag{3}$$

- **La entropía se escribe:**

$$\begin{aligned} S_\nu(U_\nu, N_\nu) &= K_B \ln \frac{(N_\nu - 1 + P)!}{(N_\nu - 1)!P!} \\ &\simeq k_B N_\nu \left[\left(1 + \frac{u_\nu}{\epsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{u_\nu}{\epsilon}\right) - \frac{u_\nu}{\epsilon} \ln \frac{u_\nu}{\epsilon} \right] \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos usado la aproximación de Stirling y $u_\nu = U_\nu/N_\nu$.

- **Consideramos que los fonones de cada frecuencia se comportan como un sistema ideal y no interaccionan entre si. Entonces la entropía total de un sistema en el que las densidades de energía u_ν vienen dadas es:**

$$S(U,N,\{u_\nu\}) = k_B \sum_\nu N_\nu \left[\left(1+\frac{u_\nu}{\epsilon}\right)\ln\left(1+\frac{u_\nu}{\epsilon}\right) - \frac{u_\nu}{\epsilon}\ln\frac{u_\nu}{\epsilon}\right]$$

donde

$$U = \sum_\nu N_\nu u_\nu \quad N = \sum_\nu N_\nu \tag{5}$$

- **Si relajamos la condición de fijar el conjunto de u_ν obtendremos la entropía del cuerpo negro. Para ello buscamos el conjunto de u_ν que maximalizan $S(U,N,\{u_\nu\})$ bajo la condición $U = \sum_\nu N_\nu u_\nu$. Para ello escribimos:**

$$S(U,N,\{u_\nu\}) = k_B \sum_{\nu\neq\nu_0} N_\nu s(u_\nu) + k_B N_{\nu_0} s(u_{\nu_0}) \tag{6}$$

$$s(u_\nu) = \left(1+\frac{u_\nu}{\epsilon}\right)\ln\left(1+\frac{u_\nu}{\epsilon}\right) - \frac{u_\nu}{\epsilon}\ln\frac{u_\nu}{\epsilon} \tag{7}$$

y

$$N_{\nu_0} u_{\nu_0} = U - \sum_{\nu\neq\nu_0} N_\nu u_\nu \tag{8}$$

donde hemos elegido una frecuencia arbitraria ν_0 para poner su densidad de energía en función de las restantes.

- **La condición de máximo es:**

$$\frac{\partial S(U,N,\{u_\nu\})}{\partial u_\nu} = 0 \quad \forall \quad \nu \neq \nu_0 \tag{9}$$

Lo que implica que:

$$T(\nu_0) = T(\nu) = T \quad \forall \quad \nu \neq \nu_0 \tag{10}$$

donde

$$\frac{1}{T(\nu)} = \frac{\partial s(u_\nu)}{\partial u_\nu} \tag{11}$$

- **Esto es:**

$$u_\nu = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \tag{12}$$

donde $\beta = 1/k_B T$ y T es la temperatura de equilibrio del cuerpo negro.

- **NOTAR: Un conjunto de partículas clásicas cumple que cada grado de libertad tiene, en promedio, una energía igual a $K_B T/2$. La radiación electromagnética tiene dos grados de libertad (dos polarizaciones) y, clásicamente, $u_\nu = k_B T$. En la expresión de Planck recuperamos el resultado clásico en dos límites: $T \to \infty$ o $h \to 0$.**

- **Finalmente, la entropía del cuerpo negro se puede escribir como:**

$$S(U, N) = \frac{U}{T} - k_B \sum_\nu N_\nu \ln\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right) \tag{13}$$

o lo que es lo mismo

$$F = k_B T \sum_\nu N_\nu \ln\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right) \tag{14}$$

- **Nos queda por obtener el valor de N_ν para completar la descripción termodinámica del cuerpo negro.**

Cálculo del número de modos por unidad de frecuencia

- **Para calcular N_ν hemos de entender primero como se comporta la radiación electromagnética estacionaria en una caja cerrada. Para ello tenemos que recordar que los campos eléctricos en el interior de una caja aislada deben de cumplir la ecuación de Maxwell:**

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{15}$$

donde c es la velocidad de la luz, $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y se deben de cumplir las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0 \quad \textbf{fuera de las paredes} \\ \vec{E}\cdot\vec{n}_\perp &= 0 \quad \textbf{en las paredes} \end{aligned} \tag{16}$$

- **La primera condición de contorno indica que no existe carga eléctrica fuera de las paredes. La segunda condición exige que no existe campo eléctrico paralelo a las caras de la caja pues, si existiese, habrían corrientes eléctricas que por construcción suponemos que no existen.**

- **La solución que cumple todas esas condiciones de contorno es:**

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^{(0)} \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \sin \omega t \\ E_2 &= E_2^{(0)} \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \sin \omega t \\ E_3 &= E_3^{(0)} \sin k_1 x \sin k_2 y \cos k_3 z \sin \omega t \end{aligned}$$

donde

$$\vec{E}^{(0)}\cdot\vec{k} = 0 \tag{17}$$

esto es, los campos electricos son perpendiculares al momento $\vec{k}$ de la onda electromagnética y

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L} \quad \forall i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

y $n_i \geq 0$ números naturales.

- **Además, para que se cumpla la ecuación de Maxwell sustituimos las soluciones y obtenemos la condición:**

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{w^2}{c^2} \tag{19}$$

- **Combinando las dos ultimas expresiones y sabiendo que $w = 2\pi\nu$ obtenemos que:**

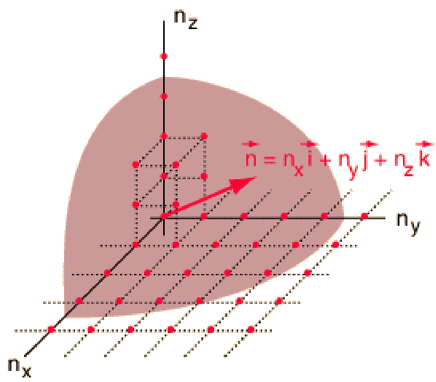
$$\nu = \frac{c}{2L} \left[n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \right]^{1/2} \tag{20}$$

  Esto es, hay muchas combinaciones de n's que pueden dar lugar a la misma ν.

- **Si suponemos que los fotones estan igualmente distribuidos en TODOS los estados accesibles, el número de fotones para una frecuencia dada, N_ν, será proporcional al número de combinaciones de n's que dan lugar a la misma frecuencia.**

- **Definimos $\bar{N}(\nu)$ como el número de estados (n_1, n_2, n_3) que dan lugar a frecuencias menores o iguales que ν. Esto es, que sus valores esten dentro del primer octante de una esfera de radio $R(\nu) = 2L\nu/c$:**

$$\bar{N}(\nu) = \frac{4}{3}\pi R(\nu)^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{8\pi L^3 \nu^3}{3c^3} \tag{21}$$



donde hemos considerado que hay dos polarizaciones por estado. Notar que esta aproximación es válida para ν suficientemente grandes.

- **El número de estados N_ν está relacionado con $\bar{N}(\nu)$:**

$$N_\nu = \frac{d\bar{N}(\nu)}{d\nu}\Delta\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2\Delta\nu \qquad (22)$$

y, en el límite continuo podemos realizar en las expresiones anteriores la siguiente substitución:

$$\sum_\nu N_\nu \to \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty d\nu\nu^2 \qquad (23)$$

Propiedades termodinámicas de un cuerpo negro

- **Conocido N_ν podemos obtener la expresión de la energía libre de Helmholtz:**

$$F = -AVT^4 \qquad (24)$$

donde

$$A = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left[1 - e^{-x}\right] \tag{25}$$

- **Potencial Químico:**

$$\mu = \frac{\partial F(T,V,N)}{\partial N} = 0$$

El potencial químico de la radiación es idénticamente nulo a cualquier temperatura porque el número de fotones no se conserva, sino que se emiten y absorben continuamente por las paredes de la cavidad ajustándose a la temperatura y el volumen de ésta.

- **Presión de radiación:**

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = AT^4 \tag{26}$$

- **Entropía:**

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = 4AVT^3 \tag{27}$$

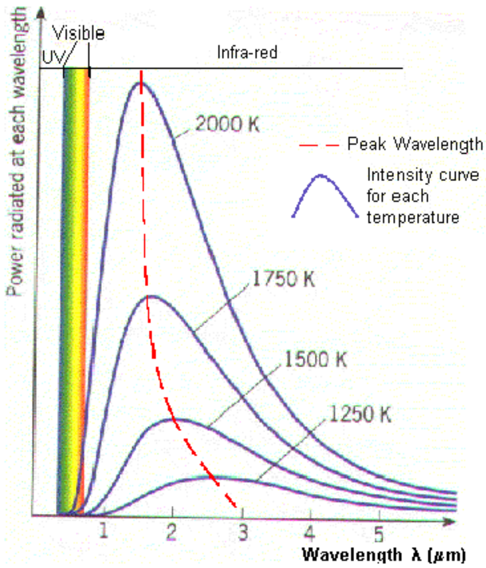
- **Energía interna:**

$$U = F + TS = 3AVT^4 = 3PV \tag{28}$$

Este resultado es la llamada Ley de Stefan-Boltzmann. Originalmente establece que la potencia energética irradiada por unidad de superficie por un cuerpo negro es proporcional a T^4. Stefan la dedujo experimentalmente en 1879 y Boltzmann le dió un marco teórico en 1884.

- **Intensidad de la radiación:**

$$I_\nu d\nu = N_\nu u_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \tag{29}$$



Esta expresión tambien puede ponerse en términos de la longitud de onda de la radiación si sabemos que

$$\lambda\nu = c \tag{30}$$

Asi:

$$\begin{aligned} J_\lambda d\lambda &= I_\nu d\nu = I_{\frac{c}{\lambda}} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{8\pi V hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T \lambda}} - 1} d\lambda \end{aligned} \tag{31}$$

El máximo de la distribución cumple la ecuación:

$$\nu_m = \frac{x k_B}{h} T \tag{32}$$

donde $x \simeq 3$ es solución de la ecuación implícita:

$$x e^x = 3\left(e^x - 1\right) \tag{33}$$

Esta es la llamada Ley de Wien y que permite relacionar frecuencia de emisión dominante de un cuerpo (color) con su temperatura (superficial) aunque no puedan ser consideradas como cuerpos negros. Así los cuerpos con temperatura baja (como las personas) radian fundamentalmente en el infrarrojo, los que están a temperaturas moderadamente altas (como una herradura en la fragua), en el rojo, y los que están a temperaturas elevadas (como las llamas de gas), en el azul.

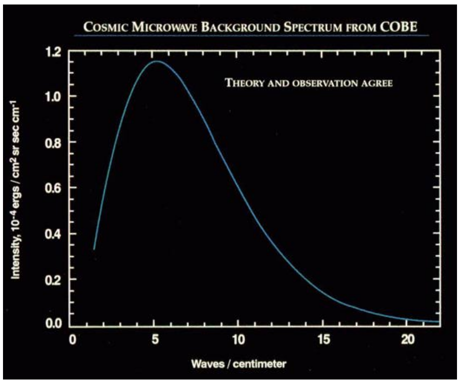
Además esta propiedad funciona con las estrellas:

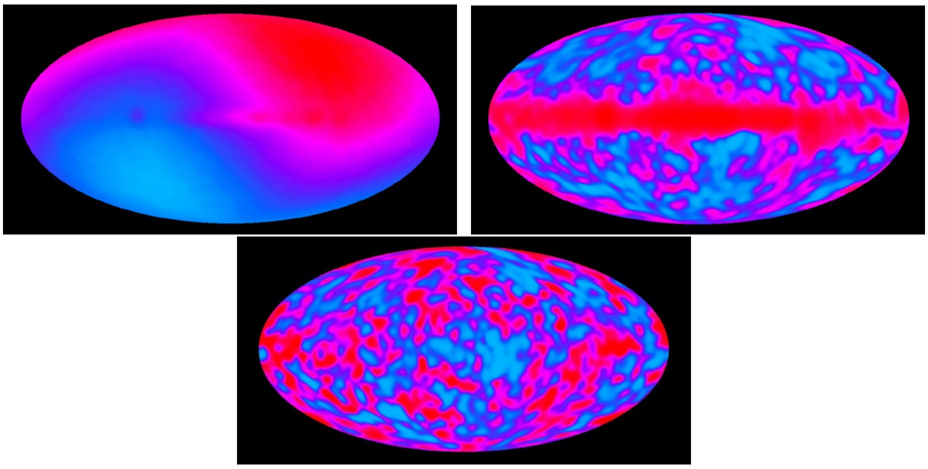
Nombre	Const.	T. esp.	Temp. (K)	Color
Antares	Escorpion	M	3300	Rojo Intenso
Aldebaran	Tauro	K	3800	Rojo
Sol		G	5700	Amarillo
Procyon	Canis Minor	F	6570	Amarillo Intenso
Sirius	Canis Major	A	9250	Blanca
Rigel	Orion	B	11200	Blanca

La radiación cósmica de fondo

En 1961 A. Penzias y R. Wilson, probando un detector de microondas muy sensible, detectaron una radiación inesperada, siempre con la misma intensidad y distribución espectral independientemente de la orientación del detector. La radiación medida era siempre la misma de día y de noche durante todo el año. Este hecho demostraba que la radiación era independiente de la rotación y del movimiento orbital de la Tierra y, por consiguiente, que debía tener origen fuera del sistema solar e, incluso, fuera de la galaxia. La distribución espectral es muy semejante a la de un cuerpo negro a una temperatura de aproximadamente 2.7 K. Se entiende en la actualidad que esta radiación se extiende por todo el Universo y es un residuo de la radiación electromagnética que se produjo poco después del Big Bang, cuando el Universo estaba a una temperatura extremadamente alta. Debido a la expansión del Universo y su correspondiente enfriamiento, la radiación original se desplazó hacia el rojo o, lo que es equivalente, hacia temperaturas inferiores.

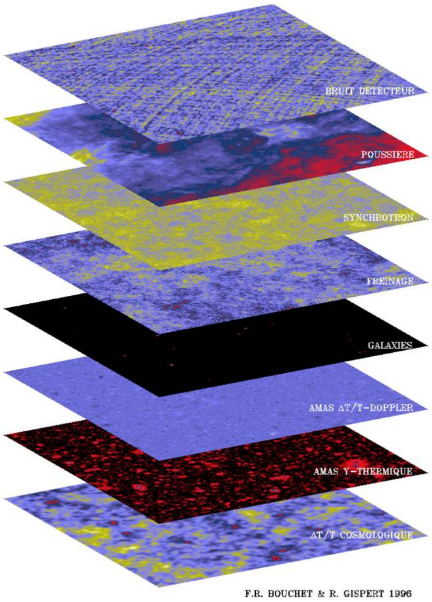
Hasta hace poco tiempo era difícil medir con precisión el espectro de la radiación cósmica de fondo, en particular las frecuencias elevadas, debido a la difusión de la radiación por la atmósfera, impedimentos que es posible superar con instrumentos a bordo de satélites. Los obtenidos por el Cosmic Background Explorer, COBE, lanzado en 1989, se ajustaron a un espectro de cuerpo negro de Planck a 2,276 $\pm$ 0,005 K, mostrando una concordancia excelente.





En realidad, la radiación cósmica de fondo no es exactamente isótropa, sino que presenta una pequeña asimetría en la dirección del cúmulo de galaxias Virgo que se atribuye al efecto Doppler debido al movimiento de nuestra galaxia en esa dirección con una velocidad de 3×10^5 m/s, y que se ha eliminado en la figura central.

En la última se ha suprimido además la Vía Láctea. Las fluctuaciones que se observan son sólo de una parte en 10^5 de los 2,7 K de media. Los resultados se basan en 2 aos de mediciones.


BRUIT DETECTEUR
POUSSIERE
SYNCHROTRON
FREINAGE
GALAXIES
AMAS ΔT/T-DOPPLER
AMAS Y-THERMIQUE
ΔT/T COSMOLOGIQUE
F.R. BOUCHET & R. GISPERT 1996