

Física Estadística

Grado de Físicas

Lección 5: Sistemas Fermiónicos y Bosónicos degenerados

- Gas ideal de fermiones degenerado: energía de Fermi
- Ecuación de estado a bajas temperaturas. Calor específico
- Gas ideal de fermiones degenerado relativistas: modelo de Chandrasekhar de las estrellas enanas blancas
- Calor específico en metales
- Gas ideal de bosones degenerado
- Condensación de Bose-Einstein
- Superfluidez del helio líquido

1. Gas ideal de fermiones degenerado: energía de Fermi

Un caso interesante del gas ideal cuántico ocurre para bajas T 's y/o altas densidades ρ , esto es para valores del parámetro

$$\delta = \rho \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \gg 1.$$

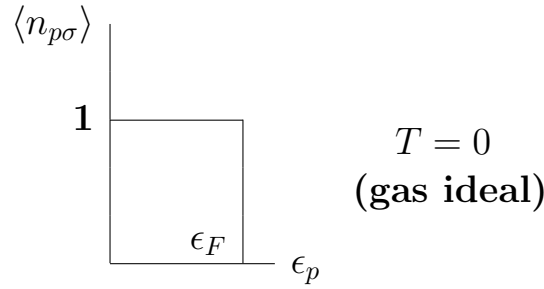
Se dice que el gas está **fuertemente degenerado**, los efectos cuánticos se manifiestan con intensidad, y es necesario estudiar por separado los casos de fermiones y bosones; aquí nos interesa el gas de fermiones fuertemente degenerado.

Si, con $\rho = \text{const}$, disminuimos la T hacia 0 la distribución de fermiones tiende a minimizar la energía total, pero no pueden acumularse las partículas en el estado fundamental, luego la distribución más favorable consistirá en la ocupación sucesiva de cada nivel energético (contando su degeneración g) empezando por el de mínima energía.

Energía de Fermi, ϵ_F : es la energía del nivel más alto que se alcanza de este modo suponiendo que tenemos un gas ideal. En esta situación, el número medio de ocupación de los niveles es

$$\langle n_p \rangle = \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p), \quad (1)$$

para $T \rightarrow 0$ con Θ la función paso de Heaviside:



Sabemos por otra parte que el número medio de partículas en el caso de un gas ideal de fermiones viene dado por:

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1}$$

Para obtener en el caso de $\beta \rightarrow \infty$ la función de Heaviside, se ha de cumplir:

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_p < \epsilon_F \text{ y } \beta \rightarrow \infty \\ 0 & \text{si } \epsilon_p > \epsilon_F \text{ y } \beta \rightarrow \infty, \end{cases}$$

de modo que

$$\epsilon_p - \mu \text{ es } \begin{cases} < 0 & \text{si } \epsilon_p < \epsilon_F \\ > 0 & \text{si } \epsilon_p > \epsilon_F, \end{cases}$$

se sigue necesariamente que la función $\mu(T)$ (esto es, la densidad de energía libre de Gibbs o potencial químico) tiene la propiedad:

$$\mu(T = 0) = \epsilon_F$$

Por otra parte, de la ecuación de estado del gas ideal cuántico, podemos estudiar la densidad del gas cuando la temperatura tiende a cero. Sabemos que:

$$\rho = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} (k_B T)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{\exp(x - \mu/k_B T) + 1}$$

Si hacemos haciendo $x = \beta\epsilon$ y $\beta \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho &= \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p) \\ &= \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{1/2} = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

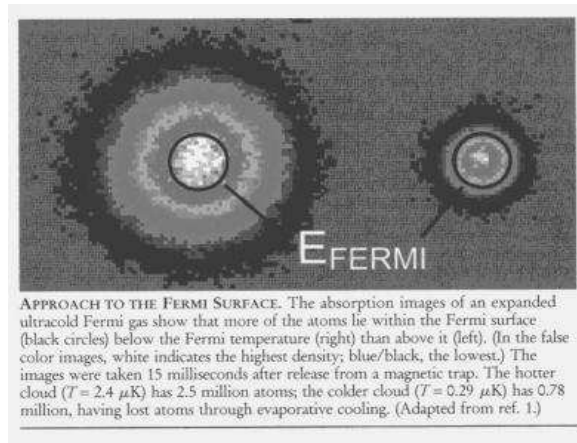
luego la energía de Fermi es

$$\epsilon_F = (6\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} \quad (3)$$

Se define el **momento de Fermi** para el caso no relativista:

$$p_F \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_F}{2m}} = (6\pi^2)^{1/3} \hbar \rho^{1/3}$$

Es notable como el momento de cada fermión en el cero absoluto es grande, en general, lo que hace que el gas de fermiones completamente degenerado sea un buen modelo, al menos cualitativo, para algunas situaciones físicas. Si T es pequeña, pero finita, algunos fermiones pueden absorber excitaciones térmicas para abandonar el **mar de Fermi**, esto es, tener energías por encima de ϵ_F .



2. Ecuación de estado a bajas temperaturas. Calor específico

Aparte del límite de temperatura cero, nos interesa obtener el comportamiento a temperaturas bajas del gas ideal de fermiones cuántico:

$$P = 8\pi \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{3h^3} I(3/2)$$

$$\rho = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} I(1/2)$$

donde

$$I(\alpha) = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^\alpha \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1}$$

Para ello hemos de buscar un desarrollo apropiado para la integral $I(\alpha)$.

Estudiemos un caso algo más general:

$$I = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1}$$

donde $f(\epsilon)$ es una función arbitraria tal que $\int d\epsilon f(\epsilon) |_0 = 0$. A temperaturas suficientemente bajas (gases suficientemente degenerados) puede escribirse (integrando por partes):

$$I = \beta \int_0^\infty d\epsilon G(\epsilon) \frac{\exp[\beta(\epsilon - \mu)]}{\{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1\}^2}$$

con

$$G(\epsilon) = \int d\epsilon f(\epsilon)$$

Realizamos el cambio de variables $\beta(\epsilon - \mu) = y$:

$$I = \int_{-\beta\mu}^\infty dy G\left(\frac{y}{\beta} + \mu\right) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

Observamos que $e^y/(e^y+1)^2$ es una función positiva que es picuda alrededor de $y = 0$ y que decrece exponencialmente rápido para $|y| \rightarrow \infty$. De esta forma los valores de y que contribuyen (no exponencialmente) son los que toman valores cercanos al cero. Así podemos desarrollar G para temperaturas pequeñas suponiendo que los valores y/β son **siempre** pequeños. Este desarrollo estará bien definido para $T \rightarrow 0$. Así:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\beta\mu}^\infty dy \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{y^n}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \int_{-\infty}^\infty dy y^n \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado $-\beta\mu$ por $-\infty$ puesto que estamos a bajas T 's ($\beta \rightarrow \infty$) y el error es exponencialmente pequeño (demostrarlo!). Notamos ahora que el cociente de exponenciales en el integrando es una función par, luego sólo las potencias pares de y contribuyen, y podemos escribir

$$I = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{\beta^{2n}} G^{(2n)}(\mu) 2 \int_0^\infty dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

Para $n = 0$, el término a integrar es $\int_0^\infty dy \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = \frac{1}{2}$ y, para $n > 0$, se tiene integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} &= 2n \int_0^\infty dy y^{2n-1} (e^y + 1)^{-2} \\ &= (1 - 2^{1-2n}) (2n - 1)! \zeta(2n) \\ &= (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} B_n \end{aligned}$$

donde B_n son los números de Bernoulli. Finalmente,

$$I \simeq \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{(2n)!} (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} B_n (k_B T)^{2n} f^{(2n-1)}(\mu)$$

cuyos primeros términos producen:

$$I = \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 f'''(\mu) + \dots,$$

Utilizando esta expresión con $f(\epsilon) = \epsilon^\alpha$, obtenemos:

$$\begin{aligned} P &= 8\pi \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{3h^3} \left[\frac{2}{5} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (k_B T)^2 \mu^{1/2} + O(T^4) \right] \\ \rho &= \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \left[\frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \mu^{-1/2} + O(T^4) \right] \end{aligned}$$

Observamos que a temperatura cero $P \propto \rho^{5/3}$. En gases de fermiones es conveniente trabajar con el nivel de Fermi ϵ_F en lugar de la densidad. Así:

$$\epsilon_F = (6\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} = \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{2/3}$$

Pero $(1+x)^{-n} = 1 - nx + (2!)^{-1} n(n+1)x^2 - \dots$, luego, invirtiendo:

$$\mu = \epsilon_F \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{-2/3} \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde, haciendo $\mu \simeq \epsilon_F + \dots$, tenemos (indicando sólo hasta segundo orden en T):

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Otra información termodinámica se sigue de aquí y de la ecuación $P = P(T, \mu)$. Por ejemplo, recordando que es $P = \frac{2}{3}\tilde{\epsilon}$ para todo gas ideal no-relativista, se obtiene

$$\tilde{\epsilon} = \frac{3}{5}n\epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde, a T 's bajas, el calor específico por partícula es

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial T} \right)_n = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} k_B,$$

esto es, $c_V \sim T$ para $T \rightarrow 0K$ que es el comportamiento típico de los fermiones a bajas temperaturas.

3. Gas ideal de fermiones degenerado relativistas: modelo de Chandrasekhar de las estrellas enanas blancas

Históricamente la primera aplicación de la teoría de Fermi es debida a **R.H. Fowler (1926)** que trata de explicar los distintos tipos de evolución que han podido tener distintos tipos de estrellas partiendo de la hipótesis de que se establece un estado de equilibrio en su interior. Este desarrollo es completado por **S. Chandrasekhar (1939, Nobel 1983)**; con la adición de algunos hechos más recientes, es todavía una descripción válida (ver **S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1939; *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Pub., NY 1960**).



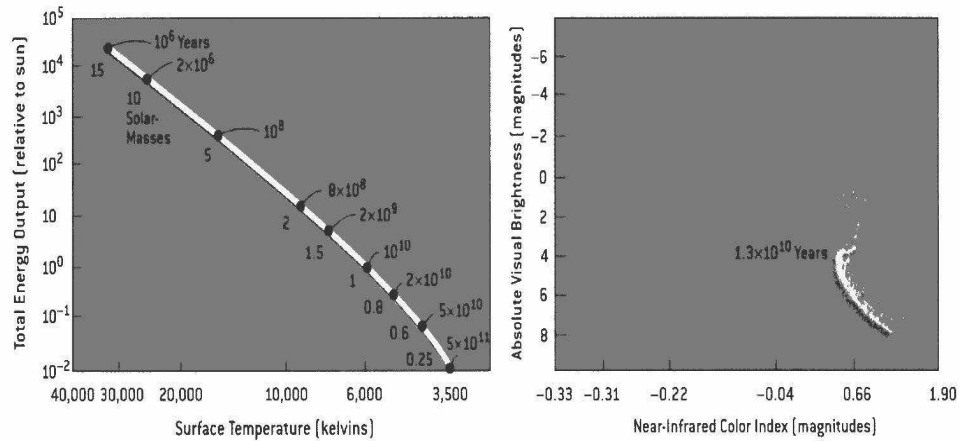
Otras referencias interesantes:

- R.J. Tayler, *Stellar Evolution*, Rep. on Progr. in Physics 31, 167 (1968).
- J. Nuckolls *et al*, *Laser-induced thermonuclear fusion*, Physics Today, August 1973, p. 46.
- Huang p. 230; Pathria p. 243
- W. Herbst & G.E. Assousa, *Supernovas and Star Formation*, Sci. Am. 241, 138 (1979).
- H.A. Bethe, *Supernova Mechanisms*, Rev. of Modern Physics 62, 801 (1990).
- R. Balian y J.P. Blaizot, *Stars and statistical physics: a teaching experience*, cond-mat/9909291.

Para la modelización de la evolución de las estrellas la observación juega aquí un papel más importante que en otras partes de la ciencia debido a que:

- La escala temporal característica para las variaciones en las propiedades del Sol es de miles de millones de años.
- Las observaciones como las relacionadas con novas, supernovas, etc. podrían ser accidentes más que etapas de una evolución estándar, etc.
- Hay observaciones, como el esquema de Hertzsprung-Rusell, a las que viene atribuyéndoseles un gran valor indicativo del proceso seguido por una estrella típica. Así, caracterizando el brillo (por ejemplo como el logaritmo de la luminosidad real — la aparente medida en la Tierra corregida de la distancia a la estrella —) y el color (mediante un índice de color — una relación entre medidas fotoeléctricas de radiación emitida en bandas bien definidas del espectro, ej. en zonas ultravioleta, azul y amarilla — que, en condiciones normales — si radiasen como cuerpos negros —, se puede relacionar con la temperatura de la superficie de la estrella). Se observa que la mayor parte ($\sim 90\%$) de las estrellas pertenecen a una franja bien definida, secuencia principal que implica cierta proporcionalidad entre brillo y

color (las blancas son brillantes, mientras que las rojas son mates):



HERTZSPRUNG-RUSSELL DIAGRAM shows that the energy output and temperature of middle-aged stars fall on a line, the "main sequence." As a star begins to die, it veers off (left). From the observed brightness and color of stars in the cluster NGC 6652 (right), astronomers have prepared such a diagram and pinpointed which stars are on the verge of dying. [Because of compositional differences, the main-sequence lines are slightly offset.]

¿El 90% es siempre de la secuencia principal, o todas gastan el 90% de su vida en la secuencia principal? Ya Rusell proponía — aceptando sugerencia de Kelvin (1861) — que las estrellas evolucionan como consecuencia (únicamente) de la energía gravitatoria liberada en un lento proceso de contracción (gigantes rojas → secuencia principal → enanas blancas). Esta aproximación es aceptable en el modelo actual que, sin embargo, involucra mayor complejidad (otras fuentes de energía, particularmente fusión, contracción del núcleo acompañada de expansión de capas más exteriores, etc.): esencialmente, mediante sucesivos procesos de contracción gravitatoria, fusión, expansión debida a degeneración cuántica, etc, se puede pasar de gran nube de hidrógeno a pequeña enana blanca, supernova, estrella de neutrones, agujero negro,...

Del hecho observacional se concluye que existen (esencialmente) tres clases de estrellas:

- **Estrellas de la secuencia principal:** Nuestro Sol es un ejemplo. Tiene un radio $R_S = 7 \times 10^8 m$, masa $M_S = 2 \times 10^{30} kg$, luminosidad $L_S = 3.8 \times 10^{26} w$ y una temperatura en su superficies de $T_S = 6000 K$ (su densidad

media es comparable a la del agua, $\simeq 1.4\text{gcm}^{-3}$). En la secuencia principal todas las estrellas tienen masas que van desde $0.1M_S$ hasta $100M_S$. El Sol está compuesto de hidrógeno, el 28% de su masa consiste en núcleos de ${}^4\text{He}$ y un 2% de otros elementos ligeros. El número total de protones es de 10^{57} .

- **Estrellas Enanas Blancas:** Tienen masas entre $0.5M_S$ y $1.4M_S$ y un radio típico de $5 \times 10^6\text{m}$ (como la Tierra). Su densidad es del orden de 10^6gcm^{-3} .
- **Estrellas de neutrones:** Tienen masas del orden de $1.4M_S$ y un radio de 10Km por lo que su densidad es comparable a la del núcleo atómico: $3 \times 10^{14}\text{gcm}^{-3}$. Cuando la masa de la estrella de neutrones es superior a $3M_S$ se cree que colapsan en agujeros negros.

Vamos a estudiar en este contexto un **modelo idealizado de estrella enana blanca** que supondremos tiene unas características tipo:

- Temperatura central $T \approx 10^7\text{K}$, a la que corresponde una energía térmica $k_B T \approx 10^3\text{eV}$, para la que todo el helio ha de estar prácticamente ionizado.
- Masa $M \approx 10^{33}\text{gr}$
- Densidad de masa $\rho \approx 10^7\text{gr/cm}^3$. (Para el Sol, M y T son comparables, pero su densidad es $\rho \approx 1\text{gr/cm}^3$.)

Si suponemos que toda la masa M es de helio ($2e+2p+2n$), podemos suponerla formada por N electrones (de masa m) y $N/2$ núcleos de helio (de masa $2m_p + 2m_n \simeq 4m_p$), y se tiene

- **masa:**

$$M \simeq Nm + \frac{N}{2}4m_p = N(m + 2m_p) \simeq 2Nm_p,$$

- **densidad de electrones:**

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} = \frac{10^7\text{gr/cm}^3}{3/4 \times 10^{24}\text{gr}} \sim \mathcal{O}\left(10^{30}\text{electrones/cm}^3\right),$$

- **momento de Fermi:**

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar \approx 10^{10} \times 10^{-27} \sim \mathcal{O}\left(10^{-17}\text{gr cm/s}\right),$$

- **energía de Fermi:**

$$\epsilon_F = p_F^2/2m \sim \mathcal{O}\left(10^{-7}\text{ergios}\right) = \mathcal{O}\left(10^5\text{eV}\right),$$

- temperatura de Fermi:

$$T_F \equiv \epsilon_F/k \sim \mathcal{O}(10^{10} \text{ K})$$

Observamos que

- p_F es comparable al momento ($mc \simeq 9 \times 10^{-28} \text{ gr} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \approx 10^{-17} \text{ gr cm/s}$) del electrón, y ϵ_F es comparable a la energía en reposo mc^2 del electrón, se sigue que la dinámica de los electrones en las enanas blancas es relativista.
- aunque T está muy por encima de las temperaturas típicas en la Tierra, es muy inferior a la de Fermi ($T_F/T \sim 10^3$), de modo que el gas de electrones está fuertemente degenerado.

Estos hechos sugieren que el modelo idealizado de una estrella enana blanca es **un gas de Fermi muy degenerado** (esto es, en el estado fundamental) formado por N **electrones relativistas** que se mueven en el campo creado por $N/2$ núcleos de helio, supuestos sin movimiento, que proporcionan la cohesión gravitatoria.

Así, los únicos efectos que esperamos son:

- Tendencia a la contracción gravitatoria hacia el centro de la estrella.
- Presión hacia fuera debida al gran momento medio que tienen los electrones (**presión de degeneración**).

Gas relativista de Fermi completamente degenerado

La **energía (cinética)** de una partícula relativista, usando θ sin dimensiones tal que $p \equiv mc \sinh \theta$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \\ &= mc^2 \left[(1 + \sinh^2 \theta)^{1/2} - 1 \right] = mc^2 (\cosh \theta - 1) \end{aligned}$$

y la **velocidad**:

$$u \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{2pc^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = c \frac{p/mc}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} = c \tanh \theta$$

En el cero absoluto, **la energía total** del gas (suponiendo una degeneración $g = 2$ debido al espín y una descripción continua — sistema macroscópico) es

$$\begin{aligned} E_0 &= 2 \sum_{|\vec{p}| < p_F} \epsilon \simeq \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon \, 4\pi p^2 \, dp \\ &= \frac{8\pi V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^2 \theta (\cosh \theta - 1) \cosh \theta \, d\theta \end{aligned}$$

La presión a temperatura cero (presión de degeneración) se puede calcular $P_0 = -\partial E_0 / \partial V$ notando que θ_F (tal que $p_F \equiv mc \sinh \theta_F$) depende de V :

$$2 \frac{V}{h^3} \left(\frac{4}{3} \pi p_F^3 \right) = N$$

Así obtenemos:

$$P_0 = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta \, d\theta$$

Usando las definiciones:

$$x \equiv \sinh \theta_F = \frac{p_F}{mc} = (3\pi^2 n)^{1/3} \frac{\hbar}{mc}, \quad (4)$$

$$A(x) = x(2x^2 - 3) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \sinh^{-1} x$$

$$B(x) = 8x^3 \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) - A(x)$$

se tiene:

$$P_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x), \quad E_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} V B(x) \quad (5)$$

El comportamiento asintótico de las funciones $A(x)$ y $B(x)$ es:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{22}x^{11} + \dots, & x \ll 1 \\ 2x^4 - 2x^2 + 3 \left(\ln 2x - \frac{7}{12} \right) + \frac{5}{4x^2} + \dots, & x \gg 1 \end{cases} \begin{cases} \text{no relativ.} \\ mc \gg p_F \\ \text{relativista} \\ mc \ll p_F \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{12}{5}x^5 - \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{15}{176}x^{11} + \dots, & x \ll 1, \text{ no relativ.} \\ 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 \left(\ln 2x - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4x^2} + \dots, & x \gg 1, \text{ relativista} \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores establecen una relación funcional entre P_0 y el radio R de la estrella enana blanca, supuesta esférica a través de la densidad n .

El resultado es que, para una masa M dada, P_0 aumenta rápidamente al disminuir R , tanto si la estrella es relativista como si no. Podemos entonces preguntarnos por el estado en el que se compensa P_0 con la presión debida a la fuerza gravitatoria.

El gas uniforme de fermiones ejerce una presión $P_0(n)$ sobre unas paredes imaginarias. Las paredes imaginarias las "construye" un agente externo (que en este caso es la interacción gravitatoria de la propia estrella). El trabajo que debe de hacer este agente externo para conseguir confinar el gas de electrones hasta una esfera de radio R es:

$$W = \int_{\infty}^{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^R dr P_0 4\pi r^2$$

Si R es el radio de equilibrio, la energía gravitatoria que tiene el sistema ha de ser igual al trabajo hecho al comprimir la estrella, de donde se sigue:

$$\int_{\infty}^R dr P_0 4\pi r^2 = -\frac{G}{2} \int_V d\vec{r} d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\alpha \frac{G M^2}{R}$$

donde $\alpha = 3/5$ si suponemos que la densidad es constante en el interior de la estrella. Derivando respecto de R :

$$P_0 = \frac{\alpha G M^2}{4\pi R^4},$$

Esta relación caracteriza nuestro modelo de estrella enana blanca. Veamos casos explícitos:

- $T \gg T_F \simeq 10^{10} \text{K}$: el sistema puede aproximarse por un gas (clásico) de Boltzmann, esto es, $P_0 = nk_B T$, y se sigue

$$R = \frac{2}{3} \alpha M \frac{G m_p}{k_B T}.$$

Donde hemos usado el hecho que $M \simeq 2N m_p$, y

$$n = \frac{N}{V} = \frac{M/2m_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{8\pi m_p R^3}.$$

Obviamente este caso puede usarse para comparar pero, por supuesto, no es aplicable a las estrellas enanas blancas donde $T \sim 10^7 \text{K}$. Sin embargo si es aplicable al estudio de las protoestrellas donde predice correctamente el hecho de que el radio va disminuyendo mientras que la temperatura va aumentando. Cuando se llega al estadio de fusión del Hidrógeno se ha de tener en cuenta ese hecho como un mecanismo extra en la equilibración de la estrella.

- $T \ll T_F$ y **baja densidad de electrones**: Esto es, tenemos un gas ideal fuertemente degenerado de electrones no relativistas. En este caso recordemos que P_0 dependía de

$$x = \frac{p_F}{mc} = \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{mc} \quad (6)$$

y que

$$x \begin{cases} \ll \\ \sim \\ \gg \end{cases} 1 \implies R \begin{cases} \gg \\ \sim \\ \ll \end{cases} 10^8 \text{ cm} \implies \begin{cases} \text{caso no relativista} \\ \text{caso relativista} \end{cases}$$

Luego en este caso tenemos que $x \ll 1$ lo que implica que $R \gg 10^8$ (en contra de lo observado para las enanas blancas) y $A(x) \simeq \frac{8}{5}x^5$, de donde

$$P_0 \simeq \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} \frac{8}{5} x^5 \propto n^{5/3} \propto \frac{M^{5/3}}{R^5}.$$

Usando esta expresión en la condición de equilibrio obtenemos:

$$R \simeq \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \frac{\hbar^2}{\mathbf{G} m m_p^{5/3} M^{1/3}} \propto M^{-1/3}$$

- $T \ll T_F$ y **alta densidad de electrones**: En este caso si son importantes los efectos relativistas y $x \gg 1$ lo que implica $R \ll 10^8$ cm y $A(x) \simeq 2x^4 - 2x^2$, y se tiene:

$$R \simeq \frac{\sqrt[3]{9\pi}}{2} \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3}} \propto M^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3}},$$

con la constante (con dimensiones de masa).

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha^3} \right)^{1/2} \frac{(\hbar c / \mathbf{G})^{3/2}}{m_p^2}.$$

Conclusiones:

- No es posible tener una estrella enana blanca con $M > M_0$ puesto que la ecuación de equilibrio no tiene soluciones reales.
- M_0 es el **límite de Chandrasekhar** y resulta $M_0 \approx 10^{33}$ gr.
- Chandrasekhar llegó a estimar $M_0 = 5.75 (\mu_e)^{-2} M_\odot$, donde

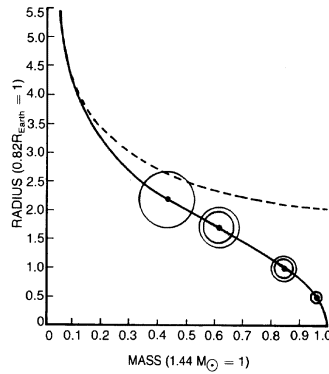


Figure 1: Masa versus radio. La curva discontinua. se sigue de las consideraciones de degeneración no-relativista de Fowler: el radio para la configuración de equilibrio disminuye, pero sólo se hace cero para masa infinita. En este caso, una estrella de cualquier masa puede confortablemente equilibrarse en el estado estrella enana blanca. Esto no ocurre para configuraciones completamente degeneradas. (Dibujo del propio Chandrasekhar.)

$M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{gr}$ es la masa del Sol

μ_e es el grado de ionización del gas.

- En la práctica, $\mu_e \simeq 2$, luego se sigue $M_0 \simeq 1.44 M_{\odot}$.
- No se tiene noticia de la existencia de estrellas enanas blancas mayores.
- Para estrellas con masa $M > M_{\odot}$ la presión de degeneración P_0 consecuencia del principio de exclusión de Pauli no es suficiente para contrarrestar la tendencia al colapso gravitacional y el sistema sigue contrayéndose generando nuevos fenómenos.

4. Calor específico en metales

Los metales se caracterizan por altas conductividades eléctrica σ y térmica κ . Alrededor de 1990 quedó claro que la carga tenía naturaleza discreta y que altas σ en metales eran consecuencia de que los electrones exteriores en átomos estaban muy débilmente ligados. A este conjunto de electrones prácticamente libres se le llamó **gas electrónico**, y comenzaron a aplicarle los métodos de la Teoría Cinética y Mecánica Estadística. **Drude (1900-1902)** y **Lorentz (1904-1909)** trataron el gas electrónico como un gas de Boltzmann. Se consiguen así descripciones cualitativamente correctas a veces, pero hay fallos importantes.

Una de las principales dificultades del modelo clásico ocurre con el calor específico: El suponer que los electrones se comportan como un gas ideal clásico que sigue la distribución de Maxwell-Boltzmann implica que los electrones han de satisfacer el **principio de equipartición**, esto es, cada electrón ha de contribuir $3 \times \frac{1}{2}k_B$ al calor específico, lo que implica su independencia con la temperatura. Las medidas muestran que todos los sólidos tienden a presentar un calor específico independiente de la temperatura para temperaturas suficientemente alta (es la **ley de Dulong y Petit**), pero:

- El valor experimental es aproximadamente $3R$ por mol para sólidos monoatómicos, en lugar de la predicción $\frac{9}{2}R$ puesto que Maxwell-Boltzmann establece que

electrones: 3 grados lib.	$\implies 3 \times \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k$
red : 3 gl \times 2 tnos. cuadrát.	$\implies 3 \times 2 \times \frac{k}{2} = \frac{6}{2}k$

- Si la temperatura no es tan alta, C_V presenta decidida dependencia en T .
- Einstein y Debye notaron cómo los modos de vibración de la red tienen naturaleza bosónica y contribuyen al calor específico con:

$$C_v = \frac{12\pi^4}{5} k \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad \theta_D = \text{temp de Debye} \quad (7)$$

Pero ¿y la contribución del gas electrónico? Si sumamos a esto una contribución constante, como la que produciría un gas clásico, no se obtiene acuerdo con los datos para metales.

Sommerfeld (1928) notó que era muy importante tratar el gas electrónico como un gas de Fermi degenerado. En efecto, tomando una degeneración $g = 2$, tenemos

$$\epsilon_F^{\text{electr}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m},$$

donde es $n = N/V = n_e n_a / a^3$ ($n_e = \#$ electrones de conducción por átomo; $n_a = \#$ átomos por celda unidad; $a =$ espaciado de la red). Si usamos los valores para el átomo de Na, por ejemplo: $n_e = 1$, $n_a = 2$, $a = 4'29 \text{ \AA}$, se sigue $n = 2'53 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, y haciendo m igual a 0'98 veces la masa del electrón para compensar los efectos de interacción culombiana entre los electrones y así tratar a este gas como ideal, se tiene

$$\epsilon_F \simeq 5'146 \times 10^{-12} \text{ erg} = 3'21 \text{ eV}$$

Si definimos la **temperatura de Fermi**

$$T_F \equiv \epsilon_F/k_B \simeq 3'3 \times 10^4 \text{ K}$$

para el sodio.

Así, en general, todos los metales tienen una T_F en el rango $10^4 - 10^5$ que es mucho mayor que temperatura ambiente ($\simeq 3 \times 10^2 \text{ K}$), luego el gas electrónico está, en efecto, completamente degenerado, y el número medio de ocupación correspondiente diferirá muy poco de la función paso para 0 K : sólo las esquinas estarán ligeramente redondeadas en una región del orden de $k_B T$, despreciable comparada con ϵ_F .

En estas condiciones, como se vió, hemos de asumir para el gas electrónico:

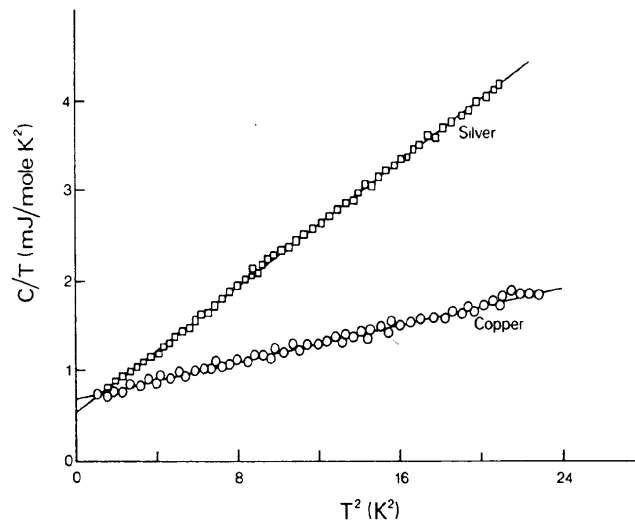
$$C_V = \frac{\pi^2}{2} k_B \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right). \quad (8)$$

Pero, a temperaturas ordinarias, es $(k_B T/\epsilon_F) \equiv T/T_F \sim \mathcal{O}(10^{-2})$, esto es, esta contribución es del orden de 10^{-2} R por mol, despreciable frente a la de la red, 3R por mol. En consecuencia, los metales a temperaturas ordinarias han de presentar únicamente la contribución bosónica, lo que confirman los experimentos.

La contribución bosónica decrece rápidamente con la temperatura (reflejando cómo los osciladores van congelándose) de modo que, a bajas temperaturas, puede hacerse comparable a la fermiónica. En particular la predicción es:

$$C_V = \gamma T + \delta T^3$$

que es confirmada muy bien en metales y aleaciones:



Observamos que la pendiente δ de estas rectas (a muy baja T) permite determinar θ_D (temperatura de Debye), mientras que el corte γ con el eje vertical está relacionado con ϵ_F .

5. Gas ideal de bosones degenerado

Recordemos que el Gas ideal de Bosones tiene una ecuación de estado dada por:

$$VP(T, \mu) = k_B T \ln \Xi(T, V, \mu) = -k_B T \sum_{\vec{k}} \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon(\vec{k})}{k_B T} \right) \right]$$

$$N = k_B T \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} = \sum_{\vec{k}} \langle n(\vec{k}) \rangle$$

donde

$$\langle n(\vec{k}) \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{k}) - \mu)} - 1}$$

que es la llamada **distribución de Bose-Einstein**.

Por otra parte, si realizamos la aproximación de sustituir las sumas sobre números cuánticos por una integral, obtenemos la ecuación de estado en forma paramétrica:

$$P(T, z) = k_B T \Lambda^{-3} Y(z)$$

$$n(T, z) = \Lambda^{-3} y(z)$$

donde $z = e^{\mu/k_B T}$,

$$Y(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{3/2}}{z^{-1} e^\eta - 1},$$

y

$$y(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{1/2}}{z^{-1} e^\eta - 1}$$

con

$$\eta \equiv \frac{\epsilon}{k_B T} = \frac{p^2}{2mk_B T}$$

Vamos a ver las propiedades que se siguen de la ecuación de estado paramétrica cuando la temperatura es baja para lo que estudiamos las funciones $Y(z)$ y $y(z)$. Notamos primero que

$$y(z) = zY'(z).$$

Por otra parte, se tiene formalmente:

$$Y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} z^m, \quad y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} z^m$$

El radio de convergencia de estas series es $z = 1$. De hecho, a diferencia del caso de fermiones, los integrandos arriba divergen para $e^\eta - z = 0$, y puesto que $0 < \eta (= p^2/2mk_B T) < \infty$, implica que $1 - z < e^\eta - z < \infty$, luego sólo hay problemas para $z > 1$ pues aparecen contribuciones negativas en el integrando. De esta forma sólo nos interesan fugacidades reales y positivas, luego podemos concluir que para bosones:

$$0 \leq z \leq 1$$

Estas funciones tienen para $z = 1$ un valor finito que puede expresarse en terminos de la función ζ de Riemann:

$$Y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} \equiv \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1'342$$

$$y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \equiv \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2'612$$

y se tiene también que la derivada de $y(z)$ diverge en $z = 1$:

$$y'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} z^{m-1}$$

$$y'(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \infty,$$

puesto que

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{5^{1/2}} + \dots \end{aligned}$$

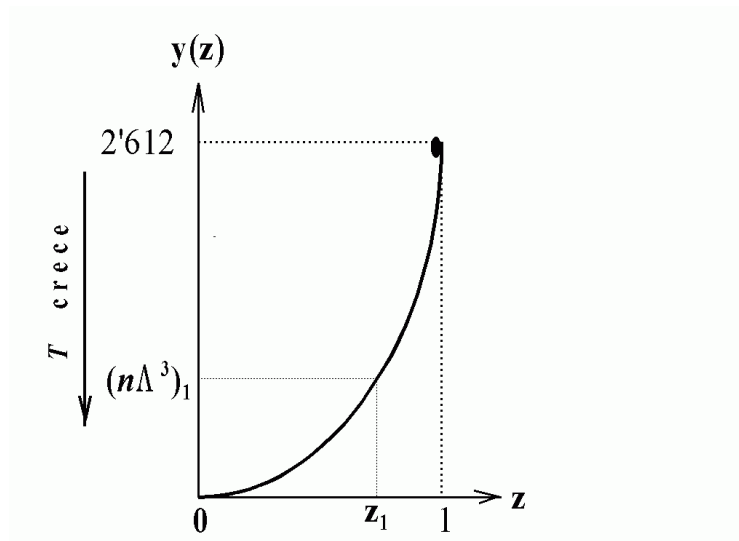
es mayor que la armónica,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

que diverge y así queda demostrado.

Esto es, $y(z)$ se mantiene por debajo de 2'612 para $0 \leq z \leq 1$ y tiene la

forma de la figura:



Notemos el siguiente comportamiento:

- De la ecuación de estado: $n\Lambda^3 = y(z)$, donde $\Lambda^3 \sim T^{-3/2}$, luego $y \sim nT^{-3/2}$; esto es, el sentido de las T 's crecientes es el indicado en la figura (y disminuye).
- Sean valores dados de n y T que implican $(n\Lambda^3)_1$ y el z_1 correspondiente. Si, manteniendo $n = \text{cte}$, T disminuye, $n\Lambda^3$ crece y también z hasta $z = 1$.
- En $z = 1$, tenemos $n\Lambda_c^3 \equiv y(1) = 2'612$ que define una temperatura,

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk (2'612)^{2/3}} n^{2/3},$$

tal que la ecuación de estado no tiene soluciones con significado físico para $T < T_c(n)$.

- Para reiterar este comportamiento, partimos de $(n\Lambda^3)_1$, mantenemos $T = \text{cte}$, y aumentamos la densidad n . Llegamos ahora $n_c\Lambda^3 \equiv y(1)$ que permite definir una densidad o volumen específico **críticos**.

$$n_c^{-1} = v_c = \frac{\Lambda^3}{y(1)} = \frac{h^3}{2'612 (2\pi mk)^{3/2}} T^{3/2},$$

tal que no hay soluciones para $n > n_c(T)$.

Es decir,

- Si disminuimos la T por debajo de $T_c(n)$, lo cual debería de ser en principio posible en un laboratorio, se produce un estado que no está descrito por nuestra ecuación.
- Si n sobrepasa $n_c(T)$, lo que sólo implica echar más partículas al sistema sin variar el volumen, parece como si esas partículas desaparecen en nuestra descripción.

Hemos de volver sobre la ecuación de estado para comprender la situación.

El origen de este problema radica en que, en algún momento, hemos substituido sumas en \vec{k} por integrales en \vec{k} al calcular la energía libre. Pero este paso sólo está justificado cuando son finitos todos los términos en la suma sobre \vec{k} , lo que no ocurre para bosones; esto es, estamos despreciando el término $\vec{k} = 0$ que contribuye a PV de acuerdo con el número medio de ocupación del estado fundamental, que resulta ser $\langle n_0 \rangle \sim N$, de modo que, para un sistema macroscópico ($N \rightarrow \infty$), produce una singularidad tipo delta que ha sido despreciada. Observemos con detalle este mecanismo.

Antes de intercambiar sumas por integrales, conviene escribir la ecuación de estado en la forma:

$$\begin{aligned}
 VP &= -k_B T \sum_{\vec{k}} \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon(\vec{k})}{k_B T} \right) \right] \\
 &= -k_B T \left[\ln(1 - z) + \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \ln \left(1 - z e^{-\epsilon(\vec{k})/k_B T} \right) \right]
 \end{aligned}$$

y se sigue para la densidad:

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \frac{z}{k_B T} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{V} \left[\frac{z}{1 - z} + \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \frac{z}{e^{\epsilon(\vec{k})/k_B T} - z} \right]$$

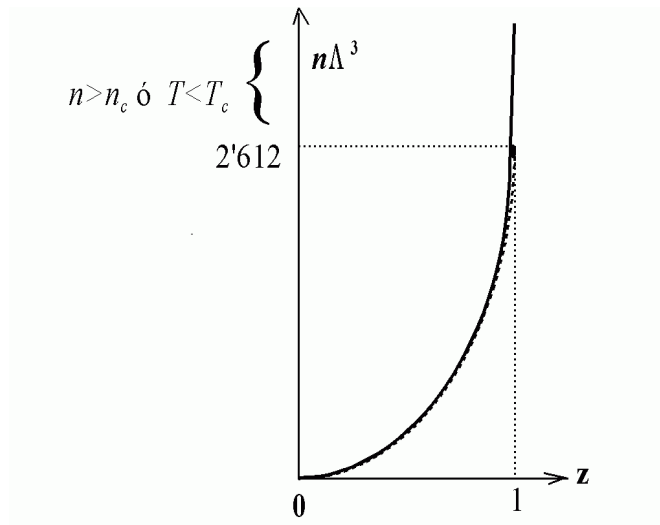
Aquí ya puede reemplazarse $\sum_{\vec{k} \neq \vec{0}}$ por la integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k}$; el resultado es el de antes pero con las correcciones $\ln(1 - z)$ y $z/(1 - z)$, esto es,

$$\begin{aligned}
 P(T, z) &= k_B T \left[-\frac{1}{V} \ln(1 - z) + \Lambda^{-3} Y(z) \right] \\
 n(T, z) &= \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} + \Lambda^{-3} y(z)
 \end{aligned}$$

Las consecuencias de estas correcciones son obvias si consideramos:

$$n\Lambda^3 = y(z) + \underbrace{\frac{\Lambda^3}{V} \frac{z}{1-z}}_{\text{corrección}}$$

- $z \neq 1$: la corrección indicada es despreciable debido al V en el denominador, y se tiene prácticamente el mismo resultado que antes, digamos $z = z_0(T, n)$ solución de $n\Lambda^3 = y(z_0)$;
- $z \simeq 1$ de modo que $z = 1 - \mathcal{O}(1/N)$: el factor $z/(1-z)$ es del orden de N , y la corrección es apreciable (línea continua en la figura)



- **Observamos que a cualquier valor de la ordenada le corresponde un $z < 1$.**

En definitiva, la solución físicamente relevante (que puede determinarse numéricamente) es de la forma:

$$z \begin{cases} = z_0(T, n) & \text{para } n\Lambda^3 \leq y(1) = 2'612 \\ \simeq 1 & \text{para } n\Lambda^3 \geq y(1) \begin{cases} T < T_c(n) \text{ ó} \\ n > n_c(T) \end{cases} \end{cases}$$

6. Condensación de Bose-Einstein

La ocupación del estado fundamental, con $\epsilon_0 = 0$, es

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} = \frac{e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta\mu}} = \frac{z}{1 - z}.$$

Usando esto en $n\Lambda^3 = y(z) + \frac{\Lambda^3}{V} \langle n_0 \rangle$, obtenemos

$$\langle n_0 \rangle = nV - \frac{V y(z)}{\Lambda^3} = N \left[1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right]$$

El comportamiento que implica esta ecuación es interesante:

- Para $T < T_c$, es $z \simeq 1$, luego podemos reemplazar aquí $y(z)$ por $y(1) \equiv n\Lambda_c^3$:

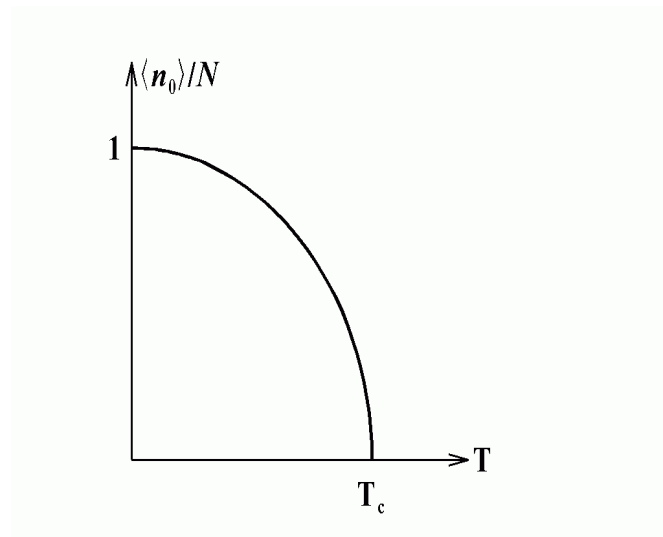
$$\langle n_0 \rangle = N \left[1 - \frac{\Lambda_c^3}{\Lambda^3} \right] = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad T < T_c.$$

- Para $T > T_c$ vale la solución original, esto es, $y(z) \simeq n\Lambda^3$, luego se tiene

$$\langle n_0 \rangle = N \left[1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right] \simeq 0, \quad T > T_c.$$

En definitiva:

$$\langle n_0 \rangle = \begin{cases} N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] & \text{para } T < T_c \\ 0 & \text{para } T > T_c : \end{cases}$$



Esto es, para $T < T_c$ se produce acumulación de partículas en el estado fundamental $\vec{p} = 0$ que, eventualmente, habrá capturado a todas para $T \rightarrow 0$. Se conoce a este fenómeno como **condensación de Bose-Einstein**.

Algunas referencias interesantes:

- no puede ocurrir en $d = 1, 2$: Hohenberg, *Phys. Rev* 158, 383 (1967).
- puede presentarse en $d = 1, 2$ si rotaciones o campos gravitatorios: Widom, *Phys. Rev.* 176, 254 (1968).
- $d = 1$ con atracción tipo δ : Ioriatti *et al.*, *Am. J. Phys.* 44, 744 (1976).

Es una condensación en el espacio de momentos (no en el real) consecuencia de la simetría de la función de ondas, pero tiene una notable similitud formal con la condensación ordinaria en la transición líquido-vapor.

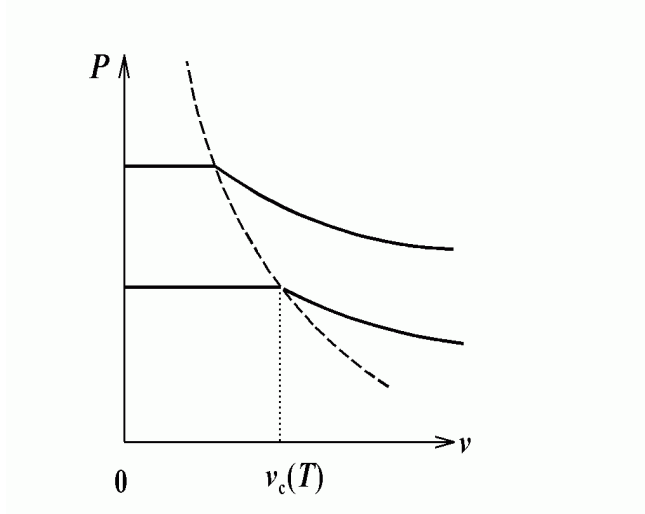
De hecho, el comportamiento de $\langle n_0 \rangle / N$ es como el del **parámetro de orden** $\Delta\rho \equiv \rho_L - \rho_G$ y otras magnitudes semejan a la situación en un cambio de fase de primer orden. Por ejemplo, recordemos la ecuación de estado, $P = k_B T \left[-\frac{1}{V} \ln(1-z) + \Lambda^{-3} Y \right]$ donde $\frac{1}{V} \ln(1-z)$ es despreciable para $z \neq 1$ pero también si $1-z = \mathcal{O}(1/N)$, pues se hace $\mathcal{O}\left(\frac{1}{V} \ln N\right) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0$, de manera que se tiene

$$P(T, n) = k_B T \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, n)] & \text{para } n < n_c \\ Y(1) & \text{para } n > n_c \end{cases}$$

o, en función del volumen específico, $v = n^{-1}$:

$$P(T, v) = k_B T \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, v)] & \text{para } v > v_c \\ Y(1) & \text{para } v < v_c, \end{cases}$$

luego las isothermas presentan una sección plana para $0 < v < v_c$, como en condensación ordinaria:

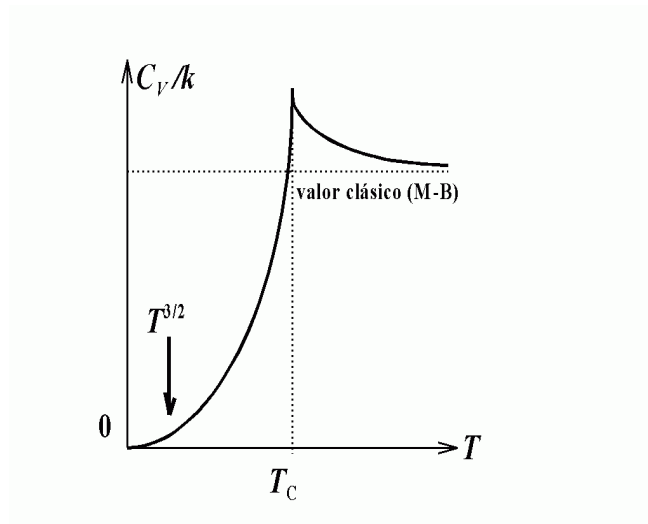


La sección plana refleja que las partículas en el estado fundamental (**fase condensada**) no contribuyen a la P . Notar que de llevar la analogía hasta

sus últimas consecuencias, se seguiría que estas isoterma describen equilibrio entre tal fase condensada y una fase **gaseosa** de volumen $v_c(T)$, y que la fase condensada tiene $v = 0$, esto es, ¡densidad infinita!

El C_V se sigue también de la ecuación de estado:

$$\frac{C_V}{k} \frac{4}{15} = \begin{cases} \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \frac{3}{5} \frac{y(z_0)}{z_0 y'(z_0)} & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} \sim T^{3/2} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$



Este comportamiento es peculiar:

- El comportamiento a bajas T 's ($T^{3/2}$) contrasta con el típico de fermiones y con el de fotones y fonones:

partícula	C_V para $T \rightarrow 0$	espectro
fermiones	$C_V \sim T$	
fonones	$C_V \sim T^3$	cp
bosones materiales	$C_V \sim T^{3/2}$	$p^2/2m$

El espectro fonónico es más denso, esto es, va como $1, 2, 3, 4, \dots$, comparado con $1, 4, 9, 16, \dots$ para bosones materiales, lo que explica el diferente C_V .

- C_v es función continua $\forall T$, pero su derivada $\partial C_v / \partial T$ presenta discontinuidad en $T = T_c$; la forma de esta discontinuidad hace que el estado sea conocido como **punto lambda**.

La entropía puede obtenerse usando:

$$P = n^2 \left(\frac{\partial a}{\partial n} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_n$$

notando que

$$\left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_T \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_a \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_n = -1$$

luego

$$s = \left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)_T \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_a = \frac{1}{n^2} P \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_a$$

de donde

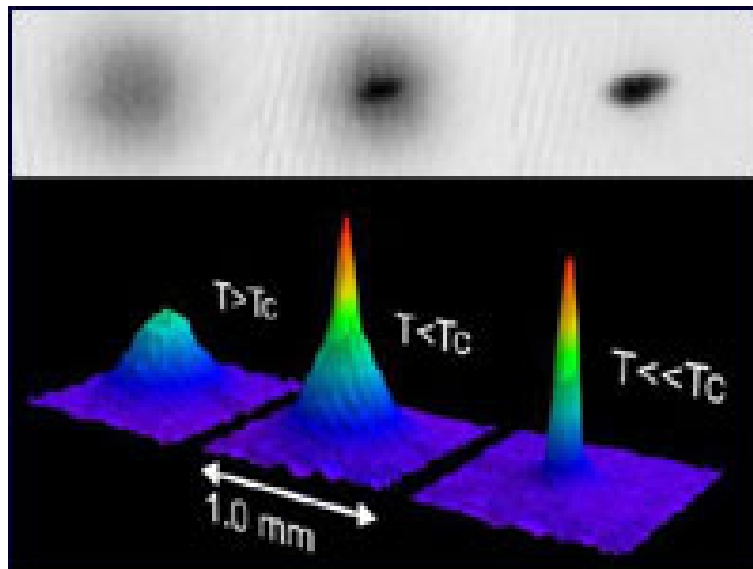
$$\frac{s}{k_B} = \begin{cases} \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \ln z_0 & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$

Es notable que esta ecuación implica:

- $s \rightarrow 0$ para $T \rightarrow 0$, de acuerdo con el postulado de Planck (propiedad que no tiene el modelo clásico gas de Boltzmann (cuya validez no incluye bajas T 's)).

Un gas de bosones sin interacciones presenta condensación de Bose-Einstein en un rango de (bajas) T 's y (altas) n 's. El fenómeno es interesante y peculiar. El modelo resulta ciertamente relevante en relación con el comportamiento de la materia a muy bajas temperaturas, por ejemplo en los fenómenos de superfluidez y superconductividad.

Ya se ha conseguido la fase condensada de Bose-Einstein en el rubidio-87 mediante una ingeniosa trampa magnética:



Evidencia de condensación de Bose-Einstein: Distribuciones de velocidad de los átomos en una nube de átomos Rb-87 enfriados por evaporación. Antes de la condensación (izquierda), la distribución es isotrópica,

como corresponde a un gas en equilibrio térmico. La fase condensada aparece (centro) como una fracción de átomos que tienen velocidades próximas a cero. Al proseguir con la evaporación, se llega (derecha) a una fase casi pura , con unos 2000 átomos en este experimento.



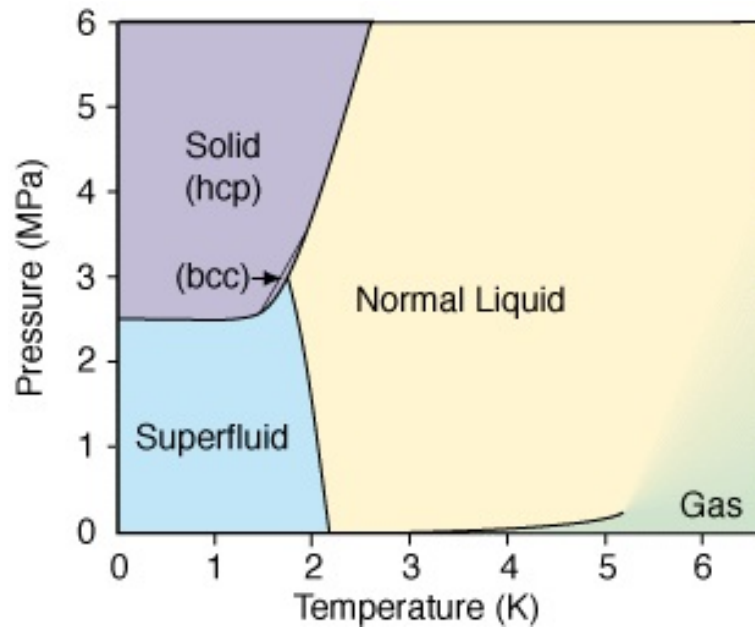
Lev Davidovitch Landau (1908-1968)

7. Superfluidez del Helio líquido

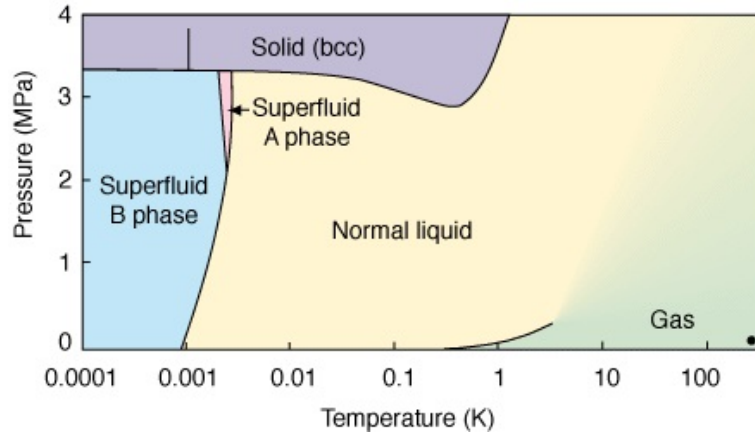
El resto de esta lección tiene una motivación múltiple:

- Discutir la aplicación del modelo de gas ideal de bosones
- Describir el tipo comportamiento general que tienden a presentar muchos sistemas materiales cerca de 0K, y repasar así física de un sistema singular ^4He .
- Hacer evidente que no existe todavía una teoría microscópica para explicar el comportamiento superfluido del ^4He , a pesar de las maravillosas ideas de Landau, y de que el fenómeno es conocido hace más de 70 años.

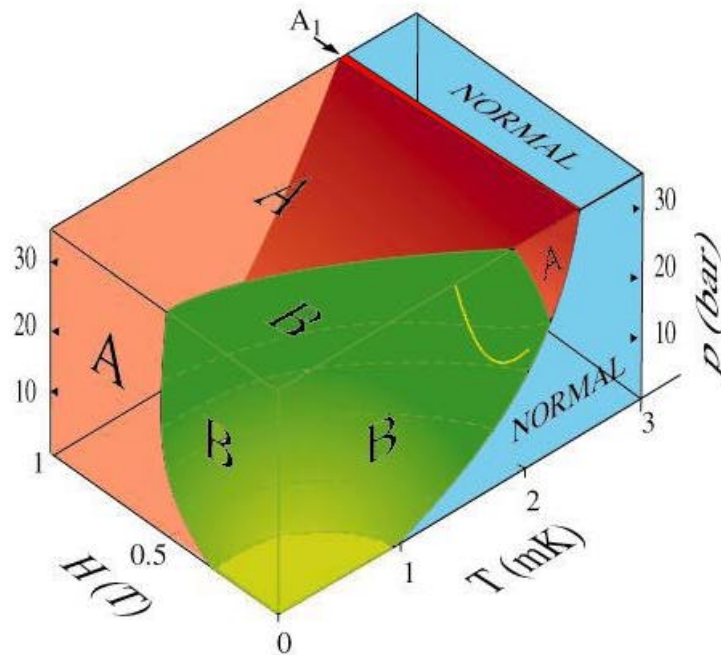
El diagrama de las fases del isótopo He^4 es:



y es el más abundante en la naturaleza. El Isótopo ^3He , también es muy interesante. Su estudio no queda incluido en este capítulo puesto que el comportamiento elemental en este caso es fermiónico (de hecho, se observa $C_V \sim T, T \rightarrow 0$).



Esquemáticamente, el diagrama de fases del He^3 en (\mathcal{H}, T, P) es



Este diagrama muestra las fases superfluidas A, A₁ y B. El líquido de Fermi normal existe por encima de 3mK y la fase sólida requiere presiones de 34bar. La línea discontinua para $\mathcal{H} = 0$ corresponde a la transición **vortex-core** observada en la fase B en rotación. Para otros detalles, puede verse, por ejemplo: **Special Issue: Helium-3 and Helium-4**, *Phys. Today*, February (1987); **'Superfluid ^3He : Theory and Recent Experiments**', E.V. Thuneberg & J.P. Pekola, *Europhys. News* 22, 3 (1991).

Algunas referencias interesantes para esta sección:

- J. Wilks, 'The Theory of Liquid He', *Rep. on Progr. in Physics* 20, 38 (1957)
- F. Reif, 'Superfluidity and Quasi-Particles', *Scientific American*, November 1960
- R.J. Donnelly, 'The Discovery of Superfluidity', *Physics Today*, July 1995
- Russell Donnelly, 'Rotons: a low-temperature puzzle', *Physics World*, February 1997

La Mecánica Cuántica rige el comportamiento de la materia. Hemos visto que, en condiciones apropiadas, la ecuación de estado es: $P =$

$nk_B T (1 - 0.177\delta - 0.003\delta^2 + \dots)$, con

$$\delta = \frac{n}{g} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2},$$

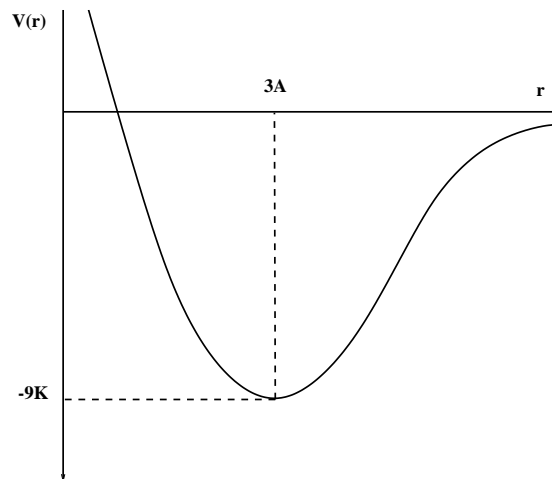
luego los efectos cuánticos serán más notorios cuanto mayor sea δ (aunque el desarrollo anterior puede perder entonces su validez), esto es, a bajas temperaturas y grandes densidades para moléculas ligeras. Este argumento ya nos indica que el helio es un buen candidato para mostrar comportamiento condicionado por las leyes de la mecánica cuántica.

Notar que el hidrógeno, más ligero, parece mejor candidato, pero las interacciones son muy importantes en este caso (a diferencia del helio, un gas noble), de modo que enmascaran a nivel macroscópico efectos con otro origen.

Veamos algunas propiedades del Helio:

- El Helio fue descubierto en el Sol; durante un eclipse total visible desde la India en 1868, el astrónomo Jules Janssen detectó una raya amarilla con el espectroscopio, que atribuyó a la radiación de un elemento químico no conocido en la Tierra. Confirmado por Joseph Norman Lockyer, que le llamó así por **helios**, Sol en griego. William Ramsay lo identificó en 1895 como subproducto en la descomposición radioactiva de minerales con uranio en una mina.
- Licuado en 1908 (lo que permitió descubrir la superconductividad a Heike Kamerlingh Onnes en 1911) no se notó que algo raro ocurría alrededor de 2K hasta 1927; en 1938, Jack Allen y Donald Misener identificaron y describieron la superfluidez, nombre dado por Kapitza por analogía con el de superconductividad ideado por Kamerlingh Onnes.
- Es el gas más difícil de licuar y de solidificar: No se hace líquido hasta enfriar por debajo de unos 5K a presión normal, y permanece líquido a temperaturas menores (extrapolando, incluso en 0K); es necesario aplicarle fuertes presiones para transformarlo en sólido.
- Recordemos que el Helio es un gas noble lo que implica que las interacciones moleculares son muy débiles: en efecto, se sigue (Slater &

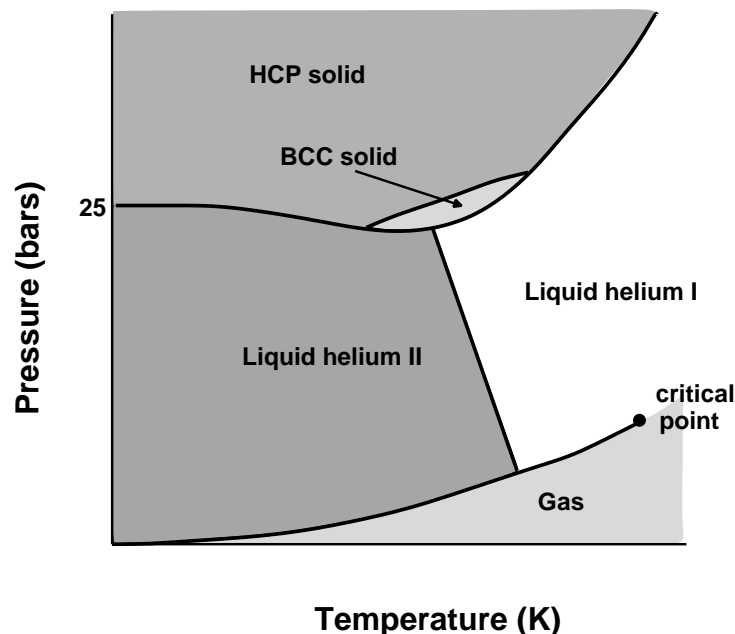
Kirkwood 1931) de la estructura electrónica del Helio que



y, en cálculos que necesitan una expresión realista, usan (ψ en K, $\sigma = 4.64 \text{ \AA}$):

$$\psi(r) = (5.67 \times 10^6) \exp\left(-21.5 \frac{r}{\sigma}\right) - 1.08 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 ;$$

- El Helio es el de masa más ligera entre los gases nobles, lo que implica una mayor movilidad y dificultad de localización en una red.
- El diagrama de fases del isótopo ^4He viene dado en la figura:



En él se observan tres fases sólidas (HCP, hexagonal con máximo empaquetamiento, la única estable a bajas temperaturas, BCC, que

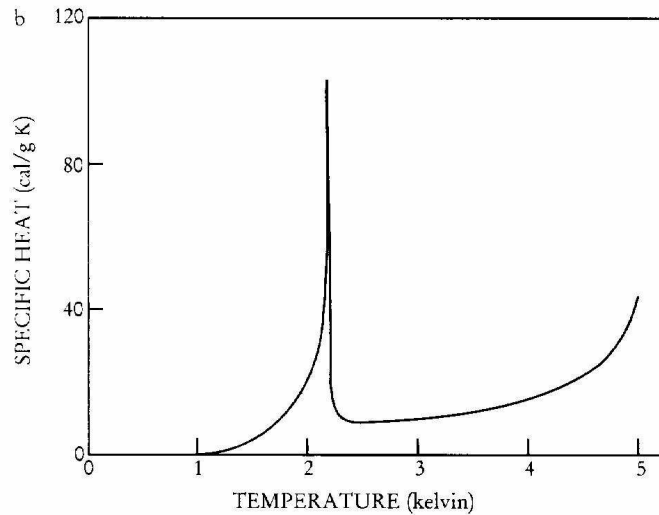
ocupa una pequeña región junto a la curva de fusión, y la FCC que aparece a presiones superiores a las mostradas en la figura).

- La curva de presión de vapor presenta un punto crítico para $T_c = 4'21 \text{ K}$ y $P_c = 2'6 \text{ atm}$ (aprox.)
- La fase sólida sólo ocurre para $P > 25 \text{ atm}$,
- En la fase líquida existe una **línea λ** de coexistencia entre dos fases líquidas diferentes, He-I y He-II, de modo que A y B son puntos triples.
- A lo largo de la curva de presión de vapor, la transición ocurre para $T_\lambda = 2'18 \text{ K}$ y volumen específico: $v_\lambda = 4'26 \text{ \AA}^3$
- La transición λ se manifiesta: con cierta facilidad a simple vista. Sea He⁴ en vasija Dewar. Enfriar, reduciendo P , a través del punto λ , siguiendo la curva de presión de vapor. Se observa:
 - $T > T_\lambda$ (región I): líquido agitado por burbujas de vapor que se forman por todo él.
 - $T < T_\lambda$ (región II): líquido en calma; no hay ebullición, aunque puede haber evaporación en superficie.

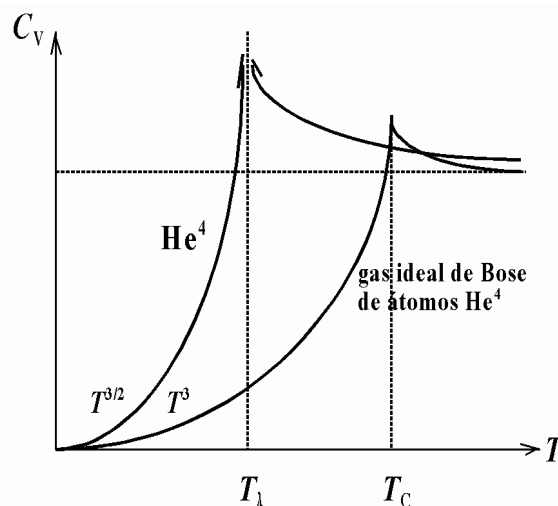
Se interpreta: los transportes de calor ocurren tan rápidamente que no pueden producirse gradientes de temperatura como si la conductividad calorífica fuese infinita.

- C_V diverge logarítmicamente a ambos lados con forma que da nombre a la transición:

$$C_V = \left\{ \begin{array}{c} a^+ \\ a^- \end{array} \right\} + b \ln c |T - T_\lambda|, \quad T \rightarrow T_\lambda^\pm$$



La forma de C_V recuerda la discutida en la condensación Bose-Einstein:



y, de hecho, hay evidencias de que este fenómeno es relevante para el comportamiento del Helio a bajas temperaturas.

- Podemos definir

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} (e^{-\beta H} \hat{a}_0^+ \hat{a}_0)}{N \text{Tr} (e^{-\beta H})},$$

que ha sido estimado (Penrose & Onsager 1956) para el caso de interés como $\alpha \simeq 0'08$, mostrando que la condensación Bose-Einstein ocurre en estas circunstancias.

- El comportamiento **bosónico** del He^4 está fuera de duda. Es consecuencia de permanecer líquido a bajas temperaturas. Si solidificara

antes de llegar a T_λ —como en tantos materiales— la simetría de las ψ 's de los átomos individuales no tendría consecuencias tan importantes (no habría solapamiento) y la condensación de Bose-Einstein sería irrelevante. Esto es, lo peculiar del Helio es que puedan presentarse partículas en el estado fundamental sin estar ligadas a una red.

- London sugirió en 1931 que la transición del He^4 en T_λ podría ser la de un gas ideal de bosones en T_C : Se tiene que $T_C = h^2 n^{2/3} / 2\pi m k_B (2'612)^{2/3}$ y, usando los valores adecuados, $T_C = 3'13 \text{ K}$. Este valor es muy próximo a T_λ , y la diferencia podría deberse a influencia de las interacciones.

Así para explicar el comportamiento del Helio deberíamos de hacer Mecánica Estadística de bosones con interacciones.

Sin embargo el calor específico $C_V (T \rightarrow 0)$ no tiene comportamiento de los bosones materiales, $T^{3/2}$, sino como los fonones: T^3 .

Modelo de los dos fluidos:

Es un modelo fenomenológico desarrollado por Tisza (L. Tisza, *J. Phys. Radium, Ser. VIII* 1, 164, 350 (1940)) que explica las sorprendentes observaciones del Helio de los años 40.

Necesariamente involucra esa imprecisión que aparece cuando uno intenta explicar efectos cuánticos con analogías clásicas. Por ello no es alternativa a una teoría microscópica pero es un buen punto de partida para ésta y, en todo caso, resulta útil.

El modelo se basa en suponer:

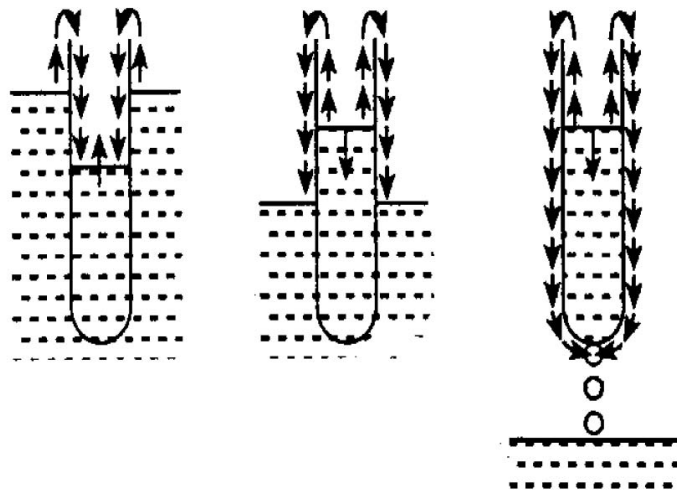
- En la fase He-II, existen dos componentes de fluido, un **fluido normal** y un **superfluido**.
- A ambas componentes se les asocia densidad de masa y campo de velocidades propios, tal que: $\rho = \rho_n + \rho_s$, $\rho \vec{v} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s$;
- El **fluido normal** se comporta como fluido clásico, ordinario y desaparece en el cero absoluto: $\rho_n \rightarrow 0$ si $T \rightarrow 0 \text{ K}$. Además es el único presente en la fase He-I: $\rho_s = 0$ ($\rho = \rho_n$) si $T \geq T_\lambda$.
- El **superfluido** tiene propiedades inusuales: entropía nula, viscosidad nula (fluir sin resistencia por capilares, $r \leq 10^{-2} \text{ cm}$)

Podemos hacer una analogía sencilla pero no rigurosa:

- **superfluido**: corresponden a partículas en el estado fundamental luego implica que están perfectamente ordenadas, luego no transportan entropía, y no pueden interaccionar, esto es, intercambiar momento entre si (pues tienen momento cero), a menos que sean excitadas, luego no tienen viscosidad.
- **componente normal**: partículas excitadas, pueden chocar con paredes, intercambiar momento y frenarse, como los fluidos ordinarios.

Sin otras hipótesis, pueden entenderse cualitativamente (incluso cuantitativamente a veces) algunas de las propiedades más extrañas del He-II.

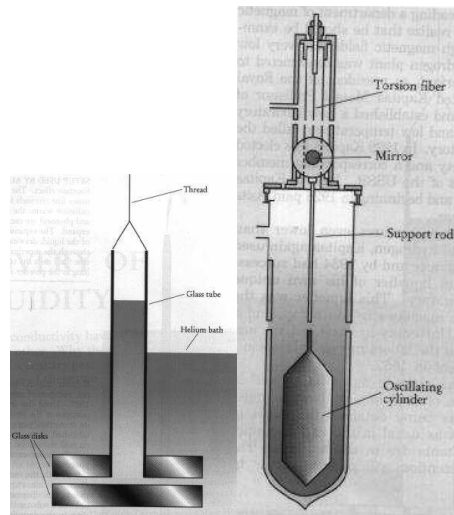
Observación (1):



Luego la superfluidez no tiene viscosidad (de hecho, medidas indican que viscosidad del He-II es, al menos, 10^6 veces menor que la del He-I), luego tiene una probabilidad apreciable de fluir en condiciones clásicamente improbables.

Observación (2): Las medidas de la viscosidad del He-II con diferentes técnicas pueden arrojar valores discordes. Considerar el método de los

capilares, y el movimiento de un objeto en el seno del fluido



- (1) Al tirar del hilo, se arrastra tubo y disco solidario, ambos en baño de He. (**Montaje experimental de P. Kapitsa, *Natura* 141, 74 (1938)**) La disminución de P , que se manifiesta en la altura de columna líquida dentro del tubo, cuando el líquido fluye entre discos es medida de la viscosidad. Si $T > T_\lambda$, se observa una diferencia de nivel durante unos minutos. Si $T < T_\lambda$, la diferencia desaparece en segundos. Kapitsa concluyó así que viscosidad del HeII es al menos 1500 veces menor que la del I.
- (2) Péndulo oscilante de Misener inmerso en Helio líquido. (**Wilhelm, Misener & Clark, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 151, 342 (1935)**).

Explicación del modelo de Tisza: El método de los capilares tiende a medir la viscosidad de la superficie, o valor próximo a ésta, dependiendo del diámetro del capilar. De hecho, habría que esperar la ley de Poiseuille:

$$\text{flujo de masa} \sim \eta^{-1} \Delta P,$$

con η el coeficiente de viscosidad en el capilar, pero no se observa tal proporcionalidad, sino que habría que concluir formalmente $\eta^{-1} \sim \infty$. Estudiando el movimiento de un objeto en el He-II, sólo el componente normal contribuirá al frenado, luego la viscosidad medida no ha de tender a anularse por debajo de T_λ .

Observación (3): Se hace fluir He líquido por un capilar hacia un depósito aislado térmicamente con He-II luego disminuye la temperatura de éste.

Explicación del modelo de Tisza: Sólo pasará superfluido por el capilar, luego crecerá la masa de la muestra pero no la entropía lo que implica que $ds < 0$ Así, $T ds = c_V dT$ implica que $dT < 0$. Se sigue también que un flujo por el capilar hacia fuera calentará la muestra, como se observa.

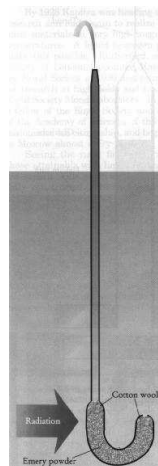
Observación (4): Dos volúmenes de Helio II conectados por un capilar. Una diferencia de temperaturas puede desaparecer (consecuencia de lo anterior) gracias a flujo del tanque frío al caliente.

Nota: $\Delta S = 0$, luego es un proceso reversible de conducción de calor, bien distinto del usual. Por supuesto, también habrá proceso irreversible de conducción de Q , pero es mucho más lento, y puede despreciarse en estos casos. De hecho, el flujo de Q medido no sigue la ley usual, esto es, no es $\propto \Delta T$.

Nota: Si las temperaturas son iguales a ambos lados del capilar, y establecemos diferentes presiones en los tanques, se enfriará el que recibe superfluido, esto es, el de menor P : **efecto mecanocalórico**.

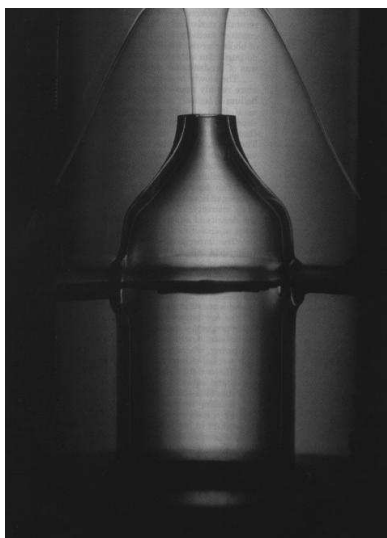
Observación (5): Efecto fuente.

Explicación del modelo de Tisza: Aumentando la temperatura en la región separada del resto por capilar, viene superfluido para contrarrestar el cambio, lo que produce una elevación de la presión.



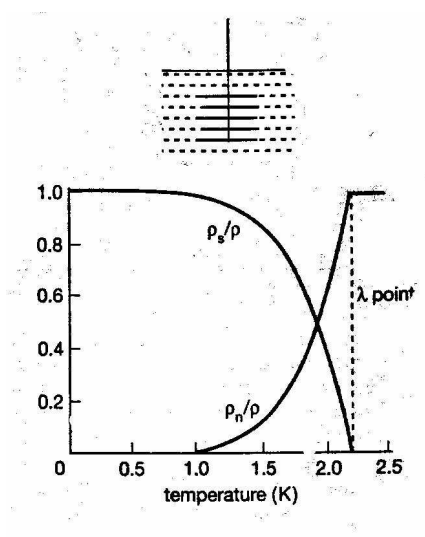
(1)

(1) Montaje original propuesto por Allen para demostrar el efecto fuente encontrado accidentalmente por él con anterioridad. El calentamiento se conseguía con radiación. (J.F. Allen & H. Jones, *Nature* 141, 243 (1938))



(3) Foto de un montaje experimental de Allen en los 1970. La línea negra horizontal es un calefactor eléctrico.

Observación (6): Experimento de Andronikashvili: Determinación empírica de ecuación de estado ρ_n/ρ_s a lo largo de la curva de presión de vapor:



- Tanque con He-II en equilibrio con su vapor, curva presión de vapor.
- Paletas separadas $\sim 0'2\text{mm}$: superfluido no es arrastrado por la rotación.
- Momento Angular \propto momento de inercia $\propto \rho_n$ (cte. proporcional: $\rho_n = \rho$ si $T > T_\lambda$).

- Se sigue para $T \sim 1 \text{ K}$ que:

$$\rho_n = \begin{cases} \rho \left(\frac{T}{T_\lambda} \right)^{5/6}, & T < T_\lambda \\ \rho, & T > T_\lambda \end{cases}$$