Problemas de Física Estadística (9)

1. Encuentre los números medios de ocupación de un sistema cuyos niveles de energía pueden albergar $0, 1, 2, \ldots, l-1$ o l partículas. Compruebe que $l = 1$ coincide con la estadística de Fermi-Dirac, mientras que $l \to \infty$ conduce a la de Bose-Einstein.

2. Demuestre que para un número de partículas, temperatura y volumen dados, el calor específico de un gas ideal de Fermi es igual al del gas ideal de Bose correspondiente siempre que $d = s$, siendo d el número de dimensiones de los recipientes que contienen los gases y s el exponente del espectro de energías, $\epsilon = Cp^s$. Para ello:

   – Demuestre que las fugacidades de los dos gases están relacionadas por
   $$z_B = \frac{z_F}{1+z_F}.$$

   – Seguidamente, y usando el resultado del apartado anterior, compruebe que las funciones $f_2(z_F)$ y $g_2(z_B)$ están igualmente relacionadas, ente este caso mediante
   $$f_2(z_F) = g_2(z_B) + \frac{1}{2}[\ln(1+z_F)]^2.$$

   – Utilice el resultado del apartado anterior para demostrar que las energías internas difieren en una constante, $U_F(T, V, N) = U_B(T, V, N) + U_F(0, V, N)$.

$$\begin{aligned} f_{d/s}(z) &= \frac{1}{\Gamma(d/s)}\int_0^\infty dx \frac{x^{d/s-1}}{z^{-1}e^x+1}, \qquad f_2(z_F) = \int_0^{z_F} dy\, \frac{\ln(1+y)}{y}, \\ g_{d/s}(z) &= \frac{1}{\Gamma(d/s)}\int_0^\infty dx \frac{x^{d/s-1}}{z^{-1}e^x-1}, \qquad g_2(z_B) = \int_{-z_B}^{0} dy\, \frac{\ln(1+y)}{y}. \end{aligned}$$

3. Hallar la ecuación de estado $P = P(\rho, T)$ de un gas ideal cuántico en series de potencias del parámetro de degeneración δ hasta orden δ^6 (inclusive).

4. Hallar las correcciones a la expresión del radio de una estrella enana blanca en función de su masa si añadimos más términos provenientes de la función $A(x)$.