Problemas de Física Estadística (8)

1. Considere una caja de altura L que contiene N partículas idénticas de masa m, en equilibrio térmico a temperatura T. El fondo de la caja ($z = 0$) es una superficie absorbente que crea para cada partícula un potencial

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z > a \\ -\epsilon, & z < a \end{cases}$$

Una partícula se considera absorbida por la superficie si $p_z^2/2m + V(z) \leq 0$.

   (a) Demuestre que la fracción de partículas absorbidas es

$$f_a = \frac{ae^{\beta\epsilon}}{ae^{\beta\epsilon} + L - a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\beta\epsilon}} dx\ e^{-x^2}.$$

   Determine el comportamiento asintótico de esta magnitud para temperaturas altas y bajas.

   (b) Determine la energía media del sistema y concluya que la probabilidad de que una partícula se encuentre en la capa "a" es $a/(a + (L - a)e^{-\beta\epsilon})$.

2. N partículas en una línea están sujetas a un potencial de interacción expresado como una función sólo de su mútua interacción, esto es, su hamiltoniano es de la forma:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + \sum_{j=1}^{N-1} \phi(x_{j+1} - x_j)$$

donde $\phi(0) = \infty$, esto es, las partículas no pueden cruzarse y el volumen del sistema es $L = x_N - x_1$. Encontrar la ecuación de estado del sistema. Demostrar que el sistema no tiene cambio de fase (la ecuación de estado siempre es univaluada y analítica).

3. Una molécula con fórmula química AB_3C en la que B y C son especies monovalentes, forman buenos cristales. En un test de la tercera ley de la termodinámica, se observa una entropía de $s = 2.754 cal/Kmol$ cuando la temperatura es $0K$ (entropía residual).

   - (a) ¿Qué puede ser conjeturado razonablemente sobre la estructura del cristal?
   - (b) Los niveles de energía de un sistema de N partículas estas dados por:

$$E_{N,l} = -N\epsilon_0 + l\epsilon \tag{1}$$

   para $l = 0, 1, 2, \ldots, 2N + 1$ y ϵ_0, ϵ¿0. Las degeneraciones correspondientes son:

$$\begin{aligned} \omega_{N,2k} &= 2^k \frac{N!}{k!(N-k)!} \\ \omega_{N,2k+1} &= 2^{N/2} \frac{N!}{k!(N-k)!} \end{aligned}$$

   Encontrar las expresiones exáctas para el número total de estados Ω_N y para la función de partición canónica. Obtener la energía libre de Helmholtz por partícula en el límite termodinámico.

- (c) Calcular la energía y la entropía por partícula. Discutir su conducta cuando $T \to 0, \infty$.
- (d) Demostrar que hay una transición de fase de primer orden a temperatura T_0 y calcular su valor. Encontrar el calor latente.