Problemas de Física Estadística (7)

1. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo gravitatorio, estando unida a un punto fijo O por un hilo sin masa de longitud máxima L. La única influencia del hilo sobre la partícula es impedir que la distancia r al punto fijo supere L. El sistema está en equilibrio térmico con una fuente de calor a temperatura T. Sea $\alpha \equiv \beta m g L$.

   (a) Demuestre que la probabilidad de que la partícula se encuentre por encima del plano horizontal que pasa por O es

   $$\text{Prob} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha+1)e^{-\alpha} - 1 + \alpha^2/2}{\alpha\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)}.$$

   (b) Sea $P(r)$ la densidad de probabilidad de la distancia de la partícula al origen O. Muestre que

   $$P(r) = \frac{\alpha^2 r}{L^2}\frac{\sinh\left(\frac{\alpha r}{L}\right)}{\alpha\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)}.$$

   (c) Sea $F\delta L$ el trabajo externo mínimo necesario para disminuir la longitud del hilo de L a $L - \delta L$, manteniendo constante la temperatura. Demuestre que

   $$F = \frac{T}{L}\frac{\alpha^2\tanh(\alpha)}{\alpha - \tanh(\alpha)}.$$

   Determine la primera corrección dependiente de T en el límite de bajas temperaturas.

   A altas temperaturas, muestre que el resultado está relacionado con la ecuación de estado de los gases ideales.

2. Dos partículas de masa m que se mueven en el segmento de recta $[0, L]$ están en equilibrio térmico con una fuente de calor a temperatura T e interactúan a través del potencial

   $$V(x_1, x_2) = \frac{\epsilon}{L}|x_1 - x_2|.$$

   Muestre que la función de partición es $Z = \frac{L^2}{\Lambda^2}f(\beta\epsilon)$, donde $f(x) = \frac{1}{x^2}(e^{-x} + x - 1)$. Compruebe que en el límite de bajas temperaturas $U \simeq 2k_BT - (k_BT)^2/\epsilon$.

3. Considere un gas ideal clásico de N moléculas monoatómicas de masa m, confinadas en un recipiente esférico de radio R y sujetas a un campo central de fuerzas descrito por el potencial atractivo $V(r) = \alpha r$ ($\alpha > 0$), donde r representa la distancia al centro del recipiente. El sistema está en equilibrio térmico a temperatura T. Calcule la ecuación de estado del gas y discuta el límite de campo débil. Exprese el resultado en función del parámetro $x = \beta\alpha R$.