Problemas de Física Estadística (2)

1. El operador densidad cuántico de una particula libre en una caja de volumen $V = L^3$ viene dado por:
$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp\left[-\beta \hat{H}\right]$$
donde $\beta \in R^+$, $Z = Tr(\exp(-\beta \hat{H}))$ y $\hat{H} = p^2/2m$ es el operador hamiltoniano.
   - (a) Hallar las funciones propias y los valores propios del operador hamiltoniano.
   - (b) Obtener los elementos matriciales del operador $\hat{\rho}$ en la anterior base del espacio de Hilbert.
   - (c) La transformación de Wigner conecta un operador cuántico $\hat{O}$ con su representación clásica, O, si conocemos los elementos matriciales del operador en la representación de posiciones, $\langle \vec{q}\,|\hat{O}|\vec{q}\,'\rangle$:
   $$O(\vec{q}, \vec{p}) = \int_{R^3} d\vec{r}\,\langle \vec{q} - \vec{r}/2|\hat{O}|\vec{q} + \vec{r}/2\rangle \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right]$$
   Hallar la representación clásica del operador densidad cuántico hallado en el apartado (b). Comentar el resultado.
   - (d) Dada la representación clásica de un operador, hallar (utilizando la transformación de Wigner) los elementos matriciales del operador cuántico asociado (prescripción de Weyl).

2. Sea una partícula clásica moviéndose libremente en una línea. La función densidad inicial en el espacio de las fases viene dada por:
$$\rho(q, p, t = 0) = \delta(q)(2\pi m k_B T)^{-1/2} \exp\left[-\frac{p^2}{2mk_BT}\right]$$
donde m es la masa de la partícula y k_B,T son la constante de Boltzmann y la temperatura respectivamente.
   - (a) Escribir la ecuación de Liouville correspondiente. Resoverla para la condición inicial dada. Estudiar su comportamiento en el tiempo y en particular su límite $t \to \infty$.
   - (b) Al anterior sistema le ponemos unas paredes rígidas en $x = \pm L$. Resolver la ecuación de Liouville en este caso. Discutir el resultado comparandolo con el anterior.