

Física Estadística

4º curso Licenciatura de Físicas. 2011-2012

Lección 9: Sistemas Bosónicos

- Gas ideal de bosones degenerado.
- Condensación de Bose-Einstein.
- Aplicación del gas de bosones: superfluidez del helio líquido

1. Introducción.

Se sigue de las lecciones anteriores que, en el estudio de bosones juega un papel destacado más que para los fermiones, que están sometidos al Principio de Exclusión de Pauli, el número medio de ocupación del estado de momento \vec{p} y tercera componente de espín σ , $\langle n_{p,\sigma} \rangle$. Una expresión para este número puede obtenerse del potencial macrocanónico:

$$VP(T, \mu) = k_B T \ln \Xi(T, V, \mu) = -k_B T \sum_{p,\sigma} \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_p}{k_B T} \right) \right].$$

En efecto, dado que

$$N = k_B T \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} = \sum_{p,\sigma} \langle n_{p,\sigma} \rangle$$

se sigue con facilidad:

$$\langle n_{p,\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1}$$

que expresa una cualidad esencial de la **distribución de Bose-Einstein**. Donde hemos supuesto que este $\langle n_{p,\sigma} \rangle$ es independiente de σ , por lo que el estado de equilibrio no está polarizado y se tienen el mismo número de partículas en promedio con igual orientación de espín en cada nivel, de modo que el espín total en el gas es cero.

Por otra parte, también sabemos que la ecuación de estado en forma paramétrica es:

$$P(T, z) = k_B T \Lambda^{-3} Y(z) \\ n(T, z) = \Lambda^{-3} y(z)$$

donde $z = e^{\mu/k_B T}$,

$$Y(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{3/2}}{z^{-1} e^\eta - 1},$$

y

$$y(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{1/2}}{z^{-1} e^\eta - 1}$$

con

$$\eta \equiv \frac{\epsilon}{k_B T} = \frac{p^2}{2mk_B T}$$

2. Gas ideal de bosones degenerado

A temperaturas bajas y/o densidades altas, la simetría de la función de onda juega un papel esencial y se dice que el gas es degenerado. Vamos a ver las propiedades que se siguen de la ecuación de estado paramétrica en esta situación, para lo que estudiamos las funciones $Y(z)$ y $y(z)$.

Notamos primero que

$$y(z) = zY'(z).$$

Por otra parte, se tiene formalmente:

$$Y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} z^m, \quad y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} z^m$$

El radio de convergencia de estas series es $z = 1$. De hecho, a diferencia del caso de fermiones, los integrandos arriba divergen para $e^\eta - z = 0$, y puesto que $0 < \eta (= p^2/2mk_B T) < \infty$, implica que $1 - z < e^\eta - z < \infty$, luego sólo hay problemas para $z > 1$ pues aparecen contribuciones negativas en el integrando. De esta forma sólo nos interesan fugacidades reales y positivas, luego podemos concluir que para bosones:

$$0 \leq z \leq 1$$

Estas funciones tienen para $z = 1$ un valor finito que puede expresarse en terminos de la función ζ de Riemann:

$$Y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} \equiv \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1'342$$

$$y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \equiv \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2'612$$

y se tiene también que la derivada de $y(z)$ diverge en $z = 1$:

$$y'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} z^{m-1}$$

$$y'(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \infty,$$

puesto que

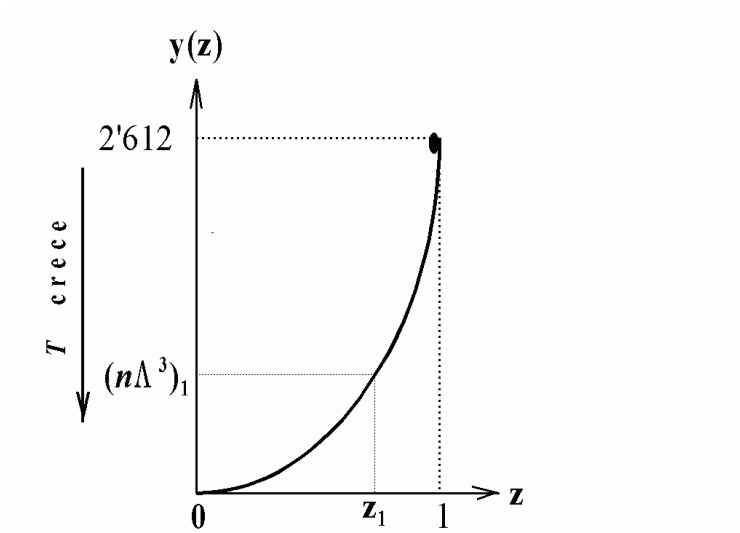
$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{5^{1/2}} + \dots \end{aligned}$$

es mayor que la armónica,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

que diverge y así queda demostrado.

Esto es, $y(z)$ se mantiene por debajo de 2'612 para $0 \leq z \leq 1$ y tiene la forma de la figura:



Notemos el siguiente comportamiento:

- De la ecuación de estado: $n\Lambda^3 = y(z)$, donde $\Lambda^3 \sim T^{-3/2}$, luego $y \sim nT^{-3/2}$; esto es, el sentido de las T 's crecientes es el indicado en la figura (y disminuye).
- Sean valores dados de n y T que implican $(n\Lambda^3)_1$ y el z_1 correspondiente. Si, manteniendo $n = \text{cte}$, T disminuye, $n\Lambda^3$ crece y también z hasta $z = 1$.
- En $z = 1$, tenemos $n\Lambda_c^3 \equiv y(1) = 2'612$ que define una temperatura,

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk (2'612)^{2/3}} n^{2/3},$$

tal que la ecuación de estado no tiene soluciones con significado físico para $T < T_c(n)$.

- Para reiterar este comportamiento, partimos de $(n\Lambda^3)_1$, mantenemos $T = \text{cte}$, y aumentamos la densidad n . Llegamos ahora $n_c\Lambda^3 \equiv y(1)$ que permite definir una densidad o volumen específicos críticos.

$$n_c^{-1} = v_c = \frac{\Lambda^3}{y(1)} = \frac{h^3}{2'612 (2\pi mk)^{3/2}} T^{3/2},$$

tal que no hay soluciones para $n > n_c(T)$.

Es decir,

- Si disminuimos la T por debajo de $T_c(n)$, lo cual debería de ser en principio posible en un laboratorio, se produce un estado que no está descrito por nuestra ecuación.
- Si n sobrepasa $n_c(T)$, lo que sólo implica echar más partículas al sistema sin variar el volumen, parece como si esas partículas desaparecen en nuestra descripción.

Hemos de volver sobre la ecuación de estado para comprender la situación.

Notamos entonces en

$$n\Lambda^3 = y(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{1/2}}{z^{-1} e^\eta - 1}, \quad \eta = \frac{p^2}{2mk_B T}$$

que la contribución integral asociada con las partículas que vayan alojándose en el estado fundamental (un número apreciable cuando $T \rightarrow 0$) se anula idénticamente, esto es, aquella extraña desaparición de partículas refleja que el formalismo no da cuenta de ellas.

El origen de este problema radica en que, en algún momento, hemos substituido sumas en p por integrales en p al calcular la energía libre. Pero este paso sólo está justificado cuando son finitos todos los términos en la suma sobre \vec{p} , lo que no ocurre para bosones; esto es, estamos despreciando el término $p = 0$ que contribuye a PV de acuerdo con el número medio de ocupación del estado fundamental, que resulta ser $\langle n_0 \rangle \sim N$, de modo que, para un sistema macroscópico ($N \rightarrow \infty$), produce una singularidad tipo delta que ha sido despreciada.

Para evitar este problema, conviene escribir la ecuación de estado en

la forma:

$$VP = -k_B T \sum_p \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - p^2/2m}{k_B T} \right) \right]$$

$$= -k_B T \left[\ln(1 - z) + \sum_{p \neq 0} \ln \left(1 - z e^{-\epsilon/k_B T} \right) \right]$$

y se sigue para la densidad:

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \frac{z}{k_B T} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{V} \left[\frac{z}{1 - z} + \sum_{p \neq 0} \frac{z}{e^{\epsilon/k_B T} - z} \right]$$

Aquí ya puede reemplazarse $\sum_{p \neq 0}$ por la integral $\int_0^\infty d\vec{p}$; el resultado es el de antes pero con las correcciones $\ln(1 - z)$ y $z/(1 - z)$, esto es,

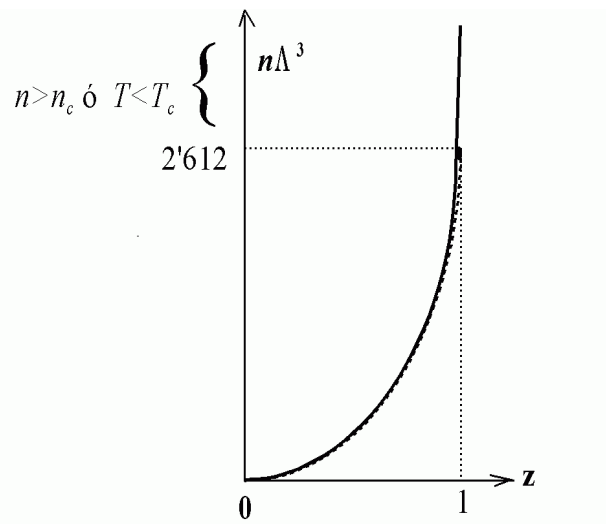
$$P(T, z) = k_B T \left[-\frac{1}{V} \ln(1 - z) + \Lambda^{-3} Y(z) \right]$$

$$n(T, z) = \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} + \Lambda^{-3} y(z)$$

Las consecuencias de estas correcciones son obvias si consideramos:

$$n\Lambda^3 = y(z) + \underbrace{\frac{\Lambda^3}{V} \frac{z}{1 - z}}_{\text{corrección}}$$

- $z \neq 1$: la corrección indicada es despreciable debido al V en el denominador, y se tiene prácticamente el mismo resultado que antes, digamos $z = z_0(T, n)$ solución de $n\Lambda^3 = y(z_0)$;
- $z \simeq 1$ de modo que $z = 1 - \mathcal{O}(1/N)$: el factor $z/(1 - z)$ es del orden de N , y la corrección es apreciable (línea continua en la figura)



- **Observamos que a cualquier valor de la ordenada le corresponde un $z < 1$.**

En definitiva, la solución físicamente relevante (que puede determinarse numéricamente) es de la forma:

$$z \begin{cases} = z_0(T, n) & \text{para } n\Lambda^3 \leq y(1) = 2'612 \\ \simeq 1 & \text{para } n\Lambda^3 \geq y(1) \begin{cases} T < T_c(n) \text{ ó} \\ n > n_c(T) \end{cases} \end{cases}$$

3. Condensación de Bose-Einstein

La ocupación del estado fundamental, con $\epsilon_0 = 0$, es

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} = \frac{e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta\mu}} = \frac{z}{1 - z}.$$

Usando esto en $n\Lambda^3 = y(z) + \frac{\Lambda^3}{V} \langle n_0 \rangle$, obtenemos

$$\langle n_0 \rangle = nV - \frac{V y(z)}{\Lambda^3} = N \left[1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right]$$

El comportamiento que implica esta ecuación es interesante:

- **Para $T < T_c$, es $z \simeq 1$, luego podemos reemplazar aquí $y(z)$ por $y(1) \equiv n\Lambda_c^3$:**

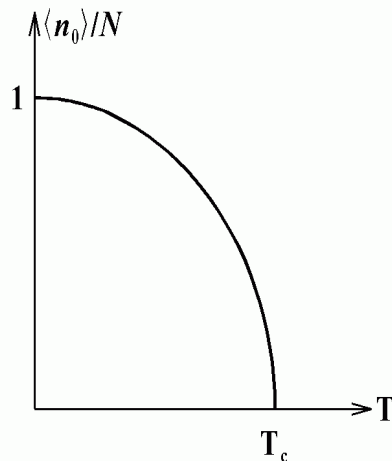
$$\langle n_0 \rangle = N \left[1 - \frac{\Lambda_c^3}{\Lambda^3} \right] = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad T < T_c.$$

- **Para $T > T_c$ vale la solución original, esto es, $y(z) \simeq n\Lambda^3$, luego se tiene**

$$\langle n_0 \rangle = N \left[1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right] \simeq 0, \quad T > T_c.$$

En definitiva:

$$\langle n_0 \rangle = \begin{cases} N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] & \text{para } T < T_c \\ 0 & \text{para } T > T_c : \end{cases}$$



Esto es, para $T < T_c$ se produce acumulación de partículas en el estado fundamental $\vec{p} = 0$ que, eventualmente, habrá capturado a todas para $T \rightarrow 0$. Se conoce a este fenómeno como **condensación de Bose-Einstein**.

Algunas referencias interesantes:

- no puede ocurrir en $d = 1, 2$: Hohenberg, *Phys. Rev* 158, 383 (1967).
- puede presentarse en $d = 1, 2$ si rotaciones o campos gravitatorios: Widom, *Phys. Rev.* 176, 254 (1968).
- $d = 1$ con atracción tipo δ : Ioriatti *et al.*, *Am. J. Phys.* 44, 744 (1976).

Es una condensación en el espacio de momentos (no en el real) consecuencia de la simetría de la función de ondas, pero tiene una notable similitud formal con la condensación ordinaria en la transición líquido-vapor.

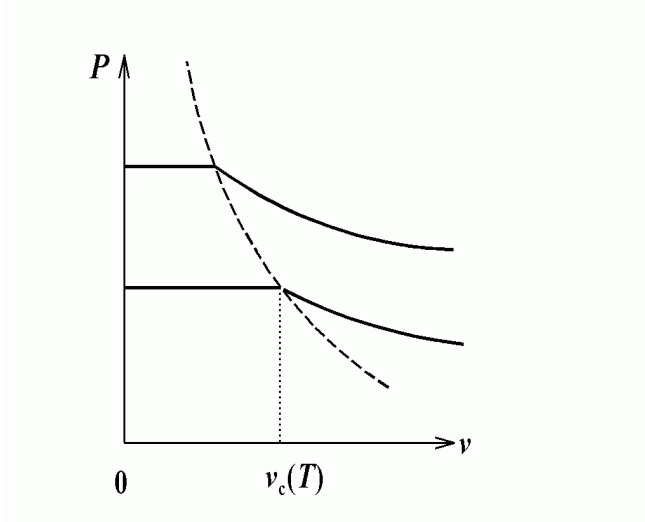
De hecho, el comportamiento de $\langle n_0 \rangle / N$ es como el del **parámetro de orden** $\Delta\rho \equiv \rho_L - \rho_G$ y otras magnitudes semejan a la situación en un cambio de fase de primer orden. Por ejemplo, recordemos la ecuación de estado, $P = k_B T \left[-\frac{1}{V} \ln(1-z) + \Lambda^{-3} Y \right]$ donde $\frac{1}{V} \ln(1-z)$ es despreciable para $z \neq 1$ pero también si $1-z = \mathcal{O}(1/N)$, pues se hace $\mathcal{O}\left(\frac{1}{V} \ln N\right) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0$, de manera que se tiene

$$P(T, n) = k_B T \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, n)] & \text{para } n < n_c \\ Y(1) & \text{para } n > n_c \end{cases}$$

o, en función del vol específico, $v = n^{-1}$:

$$P(T, v) = k_B T \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, v)] & \text{para } v > v_c \\ Y(1) & \text{para } v < v_c, \end{cases}$$

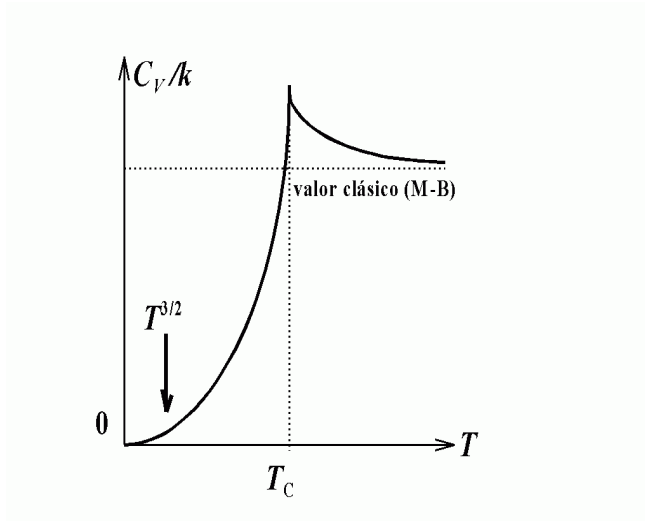
luego las isothermas presentan una sección plana para $0 < v < v_c$, como en condensación ordinaria:



La sección plana refleja que las partículas en el estado fundamental (**fase condensada**) no contribuyen a la P . Notar que de llevar la analogía hasta sus últimas consecuencias, se seguiría que estas isothermas describen equilibrio entre tal fase condensada y una fase **gaseosa** de volúmen $v_c(T)$, y que la fase condensada tiene $v = 0$, esto es, ¡densidad infinita!

El C_V se sigue también de la ecuación de estado:

$$\frac{C_V}{k} \frac{4}{15} = \begin{cases} \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \frac{3}{5} \frac{y(z_0)}{z_0 y'(z_0)} & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} \sim T^{3/2} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$



Este comportamiento es peculiar:

- El comportamiento a bajas T 's ($T^{3/2}$) contrasta con el típico de fermiones y con el de fotones y fonones:

partícula	C_V para $T \rightarrow 0$	espectro
fermiones	$C_V \sim T$	
fonones	$C_V \sim T^3$	cp
bosones materiales	$C_V \sim T^{3/2}$	$p^2/2m$

El espectro fonónico es más denso, esto es, va como $1, 2, 3, 4, \dots$, comparado con $1, 4, 9, 16, \dots$ para bosones materiales, lo que explica el diferente C_V .

- C_v es función continua $\forall T$, pero su derivada $\partial C_v / \partial T$ presenta discontinuidad en $T = T_c$; la forma de esta discontinuidad hace que el estado sea conocido como punto lambda.

La entropía puede obtenerse usando:

$$P = n^2 \left(\frac{\partial a}{\partial n} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_n$$

notando que

$$\left(\frac{\partial a}{\partial n} \right)_T \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_a \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)_n = -1$$

luego

$$s = \left(\frac{\partial a}{\partial n} \right)_T \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_a = \frac{1}{n^2} P \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_a$$

de donde

$$\frac{s}{k_B} \frac{2}{5} = \begin{cases} \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \ln z_0 & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$

Es notable que esta ecuación implica:

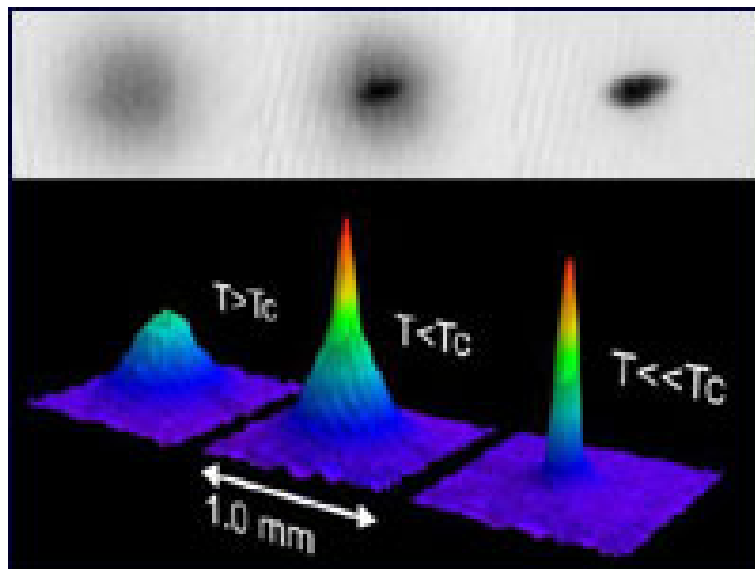
- $s \rightarrow 0$ para $T \rightarrow 0$, de acuerdo con el postulado de Planck (propiedad que no tiene el modelo clásico gas de Boltzmann (cuya validez no incluye bajas T 's)).
- que la fase condensada (la única que existe en $T = 0$) no conlleva entropía, lo que resulta ser importante en el contexto del modelo de Tisza, como veremos.

Discusión:

Un gas de bosones sin interacciones presenta condensación de Bose-Einstein en un rango de (bajas) T 's y (altas) n 's. El fenómeno es interesante y peculiar.

El modelo resulta ciertamente relevante en relación con el comportamiento de la materia a muy bajas temperaturas, por ejemplo en los fenómenos de superfluidez y superconductividad, como vemos a continuación.

Ya se ha conseguido la fase condensada de Bose-Einstein en el rubidio-87 mediante una ingeniosa trampa magnética:



Evidencia de condensación de Bose-Einstein: Distribuciones de velocidad de los átomos en una nube de átomos Rb-87 enfriados por evaporación. Antes de la condensación (izquierda), la distribución es isotrópica, como corresponde a un gas en equilibrio térmico. La fase condensada aparece (centro) como una fracción de átomos que tienen velocidades próximas a cero. Al proseguir con la evaporación, se llega (derecha) a una fase casi pura, con unos 2000 átomos en este experimento.

4. Superfluidez:

El resto de esta lección tiene una motivación múltiple:

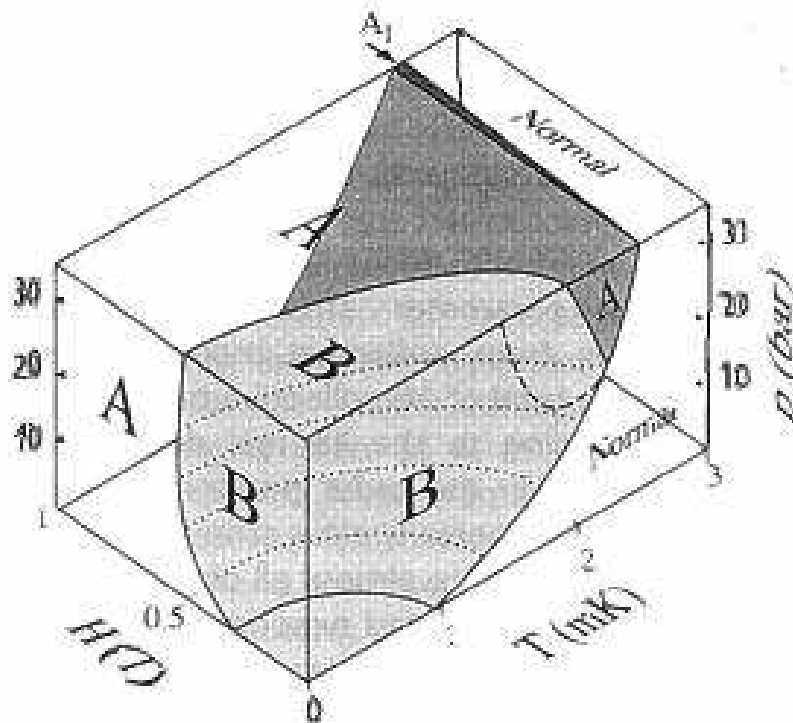
- **Discutir la aplicación del modelo de gas ideal de bosones**
- **Describir el tipo comportamiento general que tienden a presentar muchos sistemas materiales cerca de 0K, y repasar así física de un sistema singular ^4He .**
- **Introducir un interesante método para analizar la consecuencia de las interacciones entre partículas, basado en el concepto de cuasi-partícula.**
- **Hacer evidente que no existe todavía una teoría microscópica para explicar el comportamiento superfluido del ^4He , a pesar de las maravillosas ideas de Landau, y de que el fenómeno es conocido hace más de 50 años.**



Lev Davidovitch Landau (1908-1968)

El Isótopo ^3He , también es muy interesante. Su estudio no queda incluido en este capítulo puesto que el comportamiento elemental en este caso es fermiónico (de hecho, se observa $C_V \sim T, T \rightarrow 0$).

Esquemáticamente, el diagrama de fases del He^3 en (\mathcal{H}, T, P) es



Este diagrama muestra las fases superfluidas A, A₁ y B. El líquido de Fermi normal existe por encima de 3mK y la fase sólida requiere presiones de 34bar. La línea discontinua para $\mathcal{H} = 0$ corresponde a la transición **vortex-core** observada en la fase B en rotación. Para otros detalles, puede verse, por ejemplo: **Special Issue: Helium-3 and Helium-4**, *Phys. Today*, February (1987); **‘Superfluid ^3He : Theory and Recent Experiments**’, E.V. Thuneberg & J.P. Pekola, *Europhys. News* 22, 3 (1991).

Algunas referencias interesantes para esta sección:

- J. Wilks, ‘The Theory of Liquid He’, *Rep. on Progr. in Physics* 20, 38 (1957)
- F. Reif, ‘Superfluidity and Quasi-Particles’, *Scientific American*, November 1960
- R.J. Donnelly, ‘The Discovery of Superfluidity’, *Physics Today*, July 1995
- Russell Donnelly, ‘Rotons: a low-temperature puzzle’, *Physics World*, February 1997

5. Termodinámica del helio:

La Mecánica Cuántica rige el comportamiento de la materia. Hemos visto que, en condiciones apropiadas, la ecuación de estado es: $P = nk_B T (1 - 0.177\delta - 0.003\delta^2 + \dots)$, con

$$\delta = \frac{n}{g} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2},$$

luego los efectos cuánticos serán más notorios cuanto mayor sea δ (aunque el desarrollo anterior puede perder entonces su validez), esto es, a bajas temperaturas y grandes densidades para moléculas ligeras. Este (incompleto) argumento ya nos indica que el helio es un buen candidato para mostrar comportamiento condicionado por las leyes de la mecánica cuántica

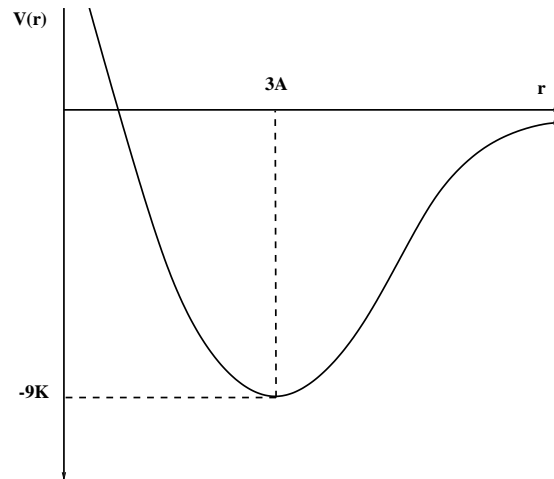
Notar que el hidrógeno, más ligero, parece mejor candidato, pero las interacciones son muy importantes en este caso (a diferencia del helio, un gas noble), de modo que enmascaran a nivel macroscópico efectos con otro origen.

Además, el comportamiento del Helio es peculiar en muchos aspectos y puede considerarse como una especie de caricatura de comportamiento bosónico a bajas temperaturas, en la que se evidencian efectos típicamente cuánticos a nivel macroscópico, observable.

- **El Helio fue descubierto en el Sol; durante un eclipse total visible desde la India en 1868, el astrónomo Jules Janssen detectó una raya amarilla con el espectroscopio, que atribuyó a la radiación de un elemento químico no conocido en la Tierra. Confirmado por Joseph Norman Lockyer, que le llamó así por helios, Sol en griego. William Ramsay lo identificó en 1895 como subproducto en la descomposición radioactiva de minerales con uranio en una mina.**
- **Licuido en 1908 (lo que permitió descubrir la superconductividad a Heike Kamerlingh Onnes en 1911) no se notó que algo raro ocurría alrededor de 2K hasta 1927; en 1938, Jack Allen y Donald Misener identificaron y describieron la superfluidez, nombre dado por Kapitza por analogía con el de superconductividad ideado por Kamerlingh Onnes.**
- **Es el gas más difícil de licuar y de solidificar: No se hace líquido hasta enfriar por debajo de unos 5K a presión normal, y permanece líquido**

a temperaturas menores (extrapolando, incluso en 0K); es necesario aplicarle fuertes presiones para transformarlo en sólido.

Recordemos que el Helio es un gas noble lo que implica que las interacciones moleculares son muy débiles: en efecto, se sigue (Slater & Kirkwood 1931) de la estructura electrónica del Helio que



y, en cálculos que necesitan una expresión realista, usan (ψ en K, $\sigma = 4'64 \text{ \AA}$):

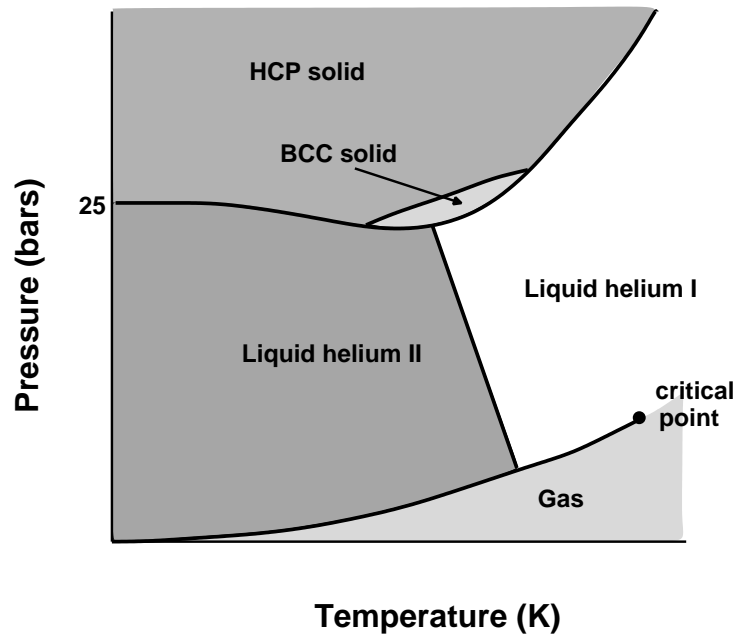
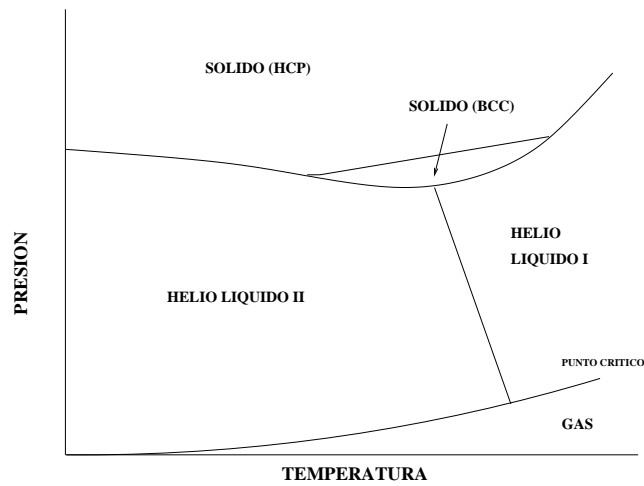
$$\psi(r) = (5'67 \times 10^6) \exp\left(-21'5 \frac{r}{\sigma}\right) - 1'08 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 ;$$

El Helio es el de masa más ligera entre los gases nobles, lo que implica una mayor movilidad y dificultad de localización en una red.

6. Diagrama de fases del isótopo ^4He :

Se presentan tres fases sólidas (HCP, hexagonal con máximo empaquetamiento, la única estable a bajas temperaturas, BCC, que ocupa una pequeña región junto a la curva de fusión, y la FCC que aparece a pre-

siones superiores a las mostradas en la figura):



La curva de presión de vapor presenta un punto crítico para $T_c = 4'21$ K y $P_c = 2'6$ atm (aprox.)

La fase sólida sólo ocurre para $P > 25$ atm,

En la fase líquida existe una **línea λ** de coexistencia entre dos fases líquidas diferentes, He-I y He-II, de modo que A y B son puntos triples.

A lo largo de la curva de presión de vapor, la transición ocurre para $T_\lambda = 2'18$ K y volumen específico: $v_\lambda = 4'26 \text{ \AA}^3$

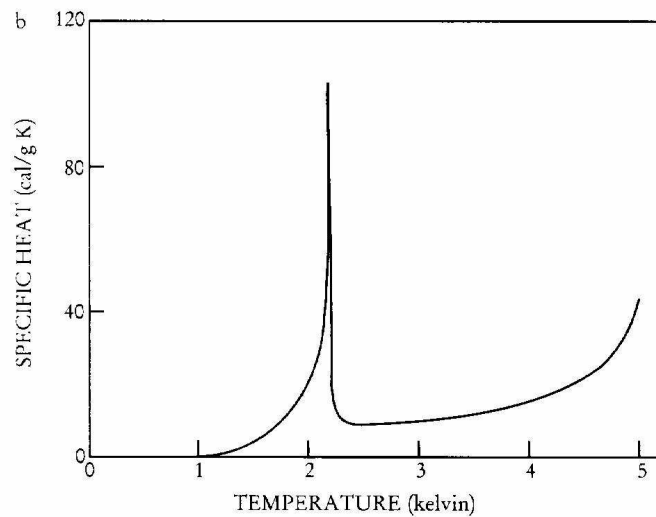
La transición λ se manifiesta: con cierta facilidad a simple vista. Sea He^4 en vasija Dewar. Enfriar, reduciendo P , a través del punto λ , siguiendo la curva de presión de vapor. Se observa:

- $T > T_\lambda$ (región I): líquido agitado por burbujas de vapor que se forman por todo él.
- $T < T_\lambda$ (región II): líquido en calma; no hay ebullición, aunque puede haber evaporación en superficie.

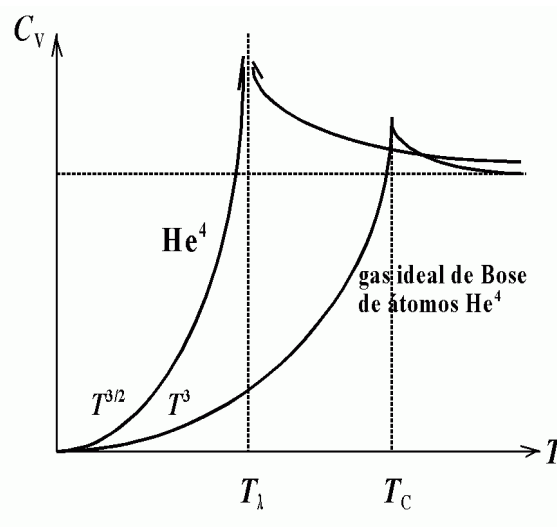
Se interpreta: los transportes de calor ocurren tan rápidamente que no pueden producirse gradientes de temperatura como si la conductividad calorífica fuese infinita.

C_V diverge logarítmicamente a ambos lados con forma que da nombre a la transición:

$$C_V = \left\{ \begin{array}{l} a^+ \\ a^- \end{array} \right\} + b \ln c |T - T_\lambda|, \quad T \rightarrow T_\lambda^\pm$$



La forma de C_V recuerda la discutida en la condensación Bose-Einstein:



y, de hecho, hay evidencias de que este fenómeno es relevante para el comportamiento del Helio a bajas temperaturas.

Podemos definir

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} (e^{-\beta H} \hat{a}_0^+ \hat{a}_0)}{N \text{Tr} (e^{-\beta H})},$$

que ha sido estimado (Penrose & Onsager 1956) para el caso de interés como $\alpha \simeq 0'08$, mostrando que la condensación Bose-Einstein ocurre en estas circunstancias. El comportamiento **bosónico** del He^4 está fuera de duda. Es consecuencia de permanecer líquido a bajas temperaturas. Si solidificara antes de llegar a T_λ —como en tantos materiales— la simetría de las ψ 's de los átomos individuales no tendría consecuencias tan importantes (no habría solapamiento) y la condensación de Bose-Einstein sería irrelevante. Esto es, lo peculiar del Helio es que puedan presentarse partículas en el estado fundamental sin estar ligadas a una red.

London sugirió en 1931 que la transición del He^4 en T_λ podría ser la de un gas ideal de bosones en T_C : Se tiene que $T_C = h^2 n^{2/3} / 2\pi m k_B (2'612)^{2/3}$ y, usando los valores adecuados, $T_C = 3'13 \text{ K}$. Este valor es muy próximo a T_λ , y la diferencia podría deberse a influencia de las interacciones.

Así para explicar el comportamiento del Helio deberíamos de hacer Mecánica Estadística de bosones con interacciones.

Sin embargo $C_V (T \rightarrow 0)$ no tiene comportamiento de los bosones materiales, sino $T^{3/2}$, como los fonones.

Antes de acometer algo en este sentido, repasamos otras propiedades macroscópicas importantes del He.

7. Modelo de los dos fluidos:

Es un modelo fenomenológico desarrollado por Tisza (**L. Tisza, *J. Phys. Radium, Ser. VIII* 1, 164, 350 (1940)**) que explica las sorprendentes observaciones del Helio de los años 40.

Necesariamente involucra esa imprecisión que aparece cuando uno intenta explicar efectos cuánticos con analogías clásicas. Por ello no es alternativa a una teoría microscópica pero es un buen punto de partida para ésta y, en todo caso, resulta útil.

El modelo se basa en suponer:

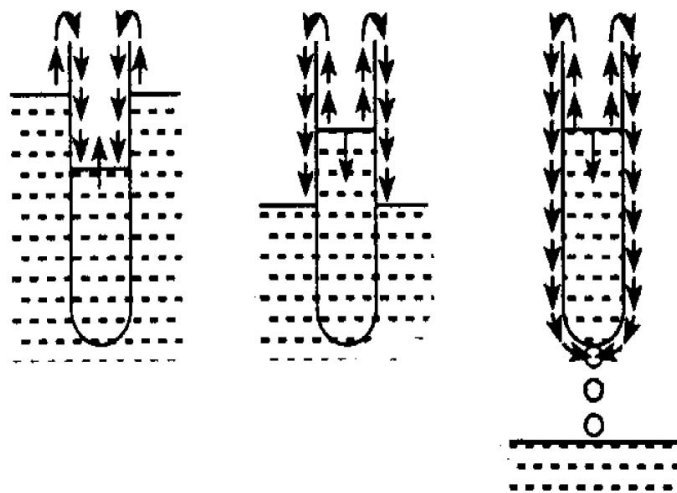
- En la fase He-II, existen dos componentes de fluido, un **fluido normal** y **superfluido**.

- A ambas componentes se les asocia densidad de masa y campo de velocidades propios, tal que: $\rho = \rho_n + \rho_s$, $\rho \vec{v} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s$;
- El **fluido normal** se comporta como fluido clásico, ordinario y desaparece en el cero absoluto: $\rho_n \rightarrow 0$ si $T \rightarrow 0$ K. Además es el único presente en la fase He-I: $\rho_s = 0$ ($\rho = \rho_n$) si $T \geq T_\lambda$.
- El **superfluido** tiene propiedades inusuales: entropía nula, viscosidad nula (fluir sin resistencia por capilares, $r \leq 10^{-2}$ cm)

Podemos hacer una analogía sencilla pero no rigurosa:

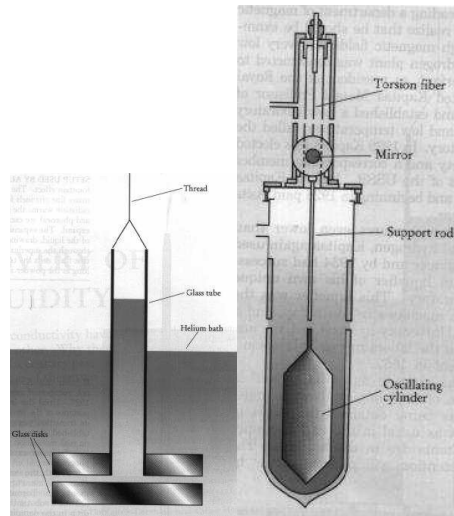
- **superfluido**: corresponden a partículas en el estado fundamental luego implica que están perfectamente ordenadas, luego no transportan entropía, y no pueden interaccionar, esto es, intercambiar momento entre si (pues tienen momento cero), a menos que sean excitadas, luego no tienen viscosidad.
- **componente normal**: partículas excitadas, pueden chocar con paredes, intercambiar momento y frenarse, como los fluidos ordinarios.

Sin otras hipótesis, pueden entenderse cualitativamente (incluso cuantitativamente a veces) algunas de las propiedades más extrañas del He-II.
Observación:



Luego la superfluidez no tiene viscosidad (de hecho, medidas indican que viscosidad del He-II es, al menos, 10^6 veces menor que la del He-I), luego tiene una probabilidad apreciable de fluir en condiciones clásicamente improbables.

Observación: Las medidas de la viscosidad del He-II con diferentes técnicas pueden arrojar valores discordes. Considerar el método de los capilares, y el movimiento de un objeto en el seno del fluido



- (1) Al tirar del hilo, se arrastra tubo y disco solidario, ambos en baño de He. (**Montaje experimental de P. Kapitsa, *Natura* 141, 74 (1938)**) La disminución de P , que se manifiesta en la altura de columna líquida dentro del tubo, cuando el líquido fluye entre discos es medida de la viscosidad. Si $T > T_\lambda$, se observa una diferencia de nivel durante unos minutos. Si $T < T_\lambda$, la diferencia desaparece en segundos. Kapitsa concluyó así que viscosidad del HeII es al menos 1500 veces menor que la del I.
- (2) Péndulo oscilante de Misener inmerso en Helio líquido. (**Wilhelm, Misener & Clark, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 151, 342 (1935)**).

Explicación del modelo de Tisza: El método de los capilares tiende a medir la viscosidad de la superficie, o valor próximo a ésta, dependiendo del diámetro del capilar. De hecho, habría que esperar la ley de Poiseuille:

$$\text{flujo de masa} \sim \eta^{-1} \Delta P,$$

con η el coeficiente de viscosidad en el capilar, pero no se observa tal proporcionalidad, sino que habría que concluir formalmente $\eta^{-1} \sim \infty$. Estudiando el movimiento de un objeto en el He-II, sólo el componente normal contribuirá al frenado, luego la viscosidad medida no ha de tender a anularse por debajo de T_λ .

Observación: Se hace fluir He líquido por un capilar hacia un depósito aislado térmicamente con He-II luego disminuye la temperatura de éste.

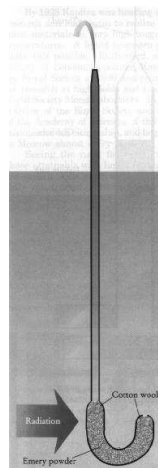
Explicación del modelo de Tisza: Sólo pasará superfluido por el capilar, luego crecerá la masa de la muestra pero no la entropía luego implica que $ds < 0$ Así, $T ds = c_V dT$ implica que $dT < 0$. Se sigue también que un flujo por el capilar hacia fuera calentará la muestra, como se observa.

Observación: Dos volúmenes de Helio II conectados por un capilar. Una diferencia de temperaturas puede desaparecer (consecuencia de lo anterior) gracias a flujo del tanque frío al caliente.

Nota: $\Delta S = 0$, luego es un **proceso reversible de conducción de calor**, bien distinto del usual. Por supuesto, también habrá proceso irreversible de conducción de Q , pero es mucho más lento, y puede despreciarse en estos casos. De hecho, el flujo de Q medido no sigue la ley usual, esto es, no es $\propto \Delta T$.

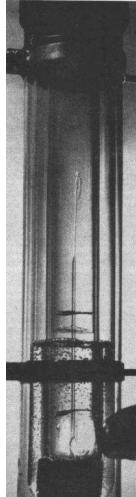
Nota: Si las temperaturas son iguales a ambos lados del capilar, y establecemos diferentes presiones en los tanques, se enfriará el que recibe superfluido, esto es, el de menor P : **efecto mecanicocalórico**.

Observación: Efecto fuente. **Explicación del modelo de Tisza:** Aumentando la temperatura en la región separada del resto por capilar, viene superfluido para contrarrestar el cambio, lo que produce una elevación de la presión.



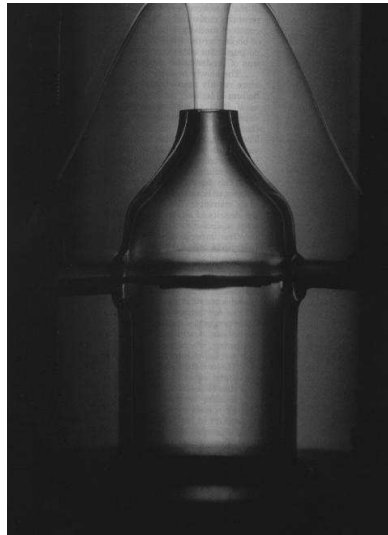
(1)

(1) Montaje original propuesto por Allen para demostrar el efecto fuente encontrado accidentalmente por él con anterioridad. El calentamiento se conseguía con radiación. (J.F. Allen & H. Jones, *Nature* 141, 243 (1938))



(2)

Una realización experimental.

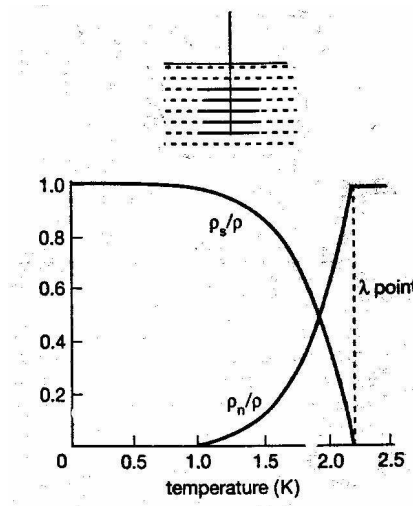


(3)

(3) Foto de un montaje experimental de Allen en los 1970. La línea negra horizontal es un calefactor eléctrico.

Experimento de Andronikashvili: determinación empírica de ecuación

de estado ρ_n/ρ_s a lo largo de la curva de presión de vapor:



- Tanque con He-II en equilibrio con su vapor, curva presión de vapor.
- Paletas separadas $\sim 0.2\text{mm}$: superfluido no es arrastrado por la rotación.
- Momento Angular \propto momento de inercia $\propto \rho_n$ (cte. proporcional: $\rho_n = \rho$ si $T > T_\lambda$).
- Se sigue para $T \sim 1\text{ K}$ que:

$$\rho_n = \begin{cases} \rho \left(\frac{T}{T_\lambda} \right)^{5/6}, & T < T_\lambda \\ \rho, & T > T_\lambda \end{cases}$$