

# Mecánica Estadística

Licenciatura de Física

## Fenómenos Críticos (5)

- Teoría de Perturbaciones
- Estrategia de Renormalización
- Renormalizar la teoría
- Búsqueda del punto fijo

## 1. Teoría de perturbaciones

Vamos a concentrarnos en estudiar el modelo  $\phi^4$  en  $3 < d \leq 4$  que es, a priori, la teoría dominante cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Puesto que sabemos resolver el Hamiltoniano con  $g = 0$  (teoría gaussiana) la primero que se nos ocurre es realizar una aproximación perturbativa. Para ello es conveniente introducir un campo externo  $J$  que nos facilita el cálculo perturbativo de los observables:

$$H[\phi; J] = \int d\underline{x} \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!}g\phi^4 + J(\underline{x})\phi(\underline{x}) \right]$$

Así:

$$\langle \phi(\underline{x}_1)\phi(\underline{x}_2), \dots, \phi(\underline{x}_n) \rangle = Q[0]^{-1} \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_n)} Q[J] \Big|_{J=0} \quad (1)$$

donde

$$Q[J] = \int D\phi \exp[-H[\phi; J]] \quad (2)$$

Se puede demostrar (**HACEDLO**) que

$$Q[J] = \exp \left[ -\frac{g}{4!} \int d\underline{x} \frac{\delta}{\delta J(\underline{x})} \right] Q_G[J] \Big|_{J=0} \quad (3)$$

donde

$$Q_G[J] = \int D\phi \exp \left[ - \int d\underline{x} \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + J(\underline{x})\phi(\underline{x}) \right] \right] \quad (4)$$

Esto es, conocido el valor de  $Q_G[J]$  podemos hallar perturbativamente el valor de cualquier observable. De hecho no

es necesario conocer el valor exacto de  $Q_G[J]$  sino extraer su dependencia explícita en  $J$ . Para ello realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\phi(\underline{x}) = \tilde{\phi}(\underline{x}) + \int d\underline{y} S(\underline{x}, \underline{y}) J(\underline{y}) \quad (5)$$

de esta forma aparecerán en la expresión términos proporcionales a  $\tilde{\phi}^2$ ,  $J^2$  y  $\tilde{\phi}J$ . Ajustamos  $S$  para que estos últimos términos desaparezcan y así extraer la dependencia de  $J$  fuera de la integral funcional. En nuestro caso se puede comprobar que:

$$S(\underline{x}, \underline{y}) = K^{-1}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (6)$$

donde

$$K(\underline{x}, \underline{y}) = [-\Delta_{\underline{x}} + m^2] \delta(\underline{x} - \underline{y}) \quad (7)$$

y

$$Q_G[J] = Q_G[0] \exp \left[ \frac{1}{2} \int d\underline{x} d\underline{y} S(\underline{x} - \underline{y}) J(\underline{x}) J(\underline{y}) \right] \quad (8)$$

El inverso de  $K$  se puede calcular fácilmente en el espacio de Fourier, así:

$$G(\underline{x}) = \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\underline{q} \cdot \underline{x}}}{q^2 + m^2} \quad (9)$$

$G$  es llamado **propagador de la teoría libre**.

Con esto ya tenemos los elementos suficientes para calcular las expresiones perturbativas de  $Q[0]$  y de las correlaciones.

### 1. Cálculo perturbativo de $Q[0]$ :

En general  $Q[0]$  se expresará:

$$Q[0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!(4!)^n} \int d\underline{x}_1 \dots d\underline{x}_n \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x}_1)^4} \dots \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x}_n)^4} Q_G[J] \Big|_{J=0}$$

Si expresamos  $Q_G[J]$  en potencias de  $J$  tenemos que para el orden  $g^n$  **solo el término con  $4n$   $J$ 's contribuirá cuando hagamos  $J = 0$ :**

$$Q[0] = Q_G[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!(4!)^n} \int \underline{dx}_1 \dots \underline{dx}_n \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x}_1)^4} \dots \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x}_n)^4} \\ \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \int \underline{dy}_1 \dots \underline{dy}_{4n} G(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) G(\underline{y}_3 - \underline{y}_4) \dots G(\underline{y}_{4n-1} - \underline{y}_{4n}) \\ J(\underline{y}_1) \dots J(\underline{y}_{4n})$$

Es fácil calcular los primeros términos perturbativos:

$$Q[0]/Q_G[0] = 1 - \frac{1}{8}gVG(0)^2 + g^2 \left[ \frac{1}{128}V^2G(0)^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{16}VG(0)^2 \int \underline{dx}G(x)^2 + \frac{1}{48}V \int \underline{dx}G(x)^4 \right] \\ + O(g^3)$$

donde  $V \equiv \int \underline{dx}$ . En general es mucho más laborioso calcular un orden  $n$  superior que tiene la estructura topológica siguiente:

$$Q[0]/Q_G[0] = \dots \frac{(-g)^n}{(4!)^n} \frac{1}{n!2^{2n}(2n)!} A(n) + \dots \quad (10)$$

donde  $A(n)$  son **todas las combinaciones de  $2n$ -propagadores  $G$  conectando  $n$  vértices con 4 patas**. Muchas de esas combinaciones dan lugar al mismo término y el problema se concreta en CONOCER cuantas veces aparece cada término. Es conveniente utilizar el esquema de los **diagramas de Feynman** para conocer cuantos términos diferentes aparecen y cuales son sus factores combinatoriales. En

cualquier caso, ante la duda, siempre podemos realizar las derivadas analíticamente.

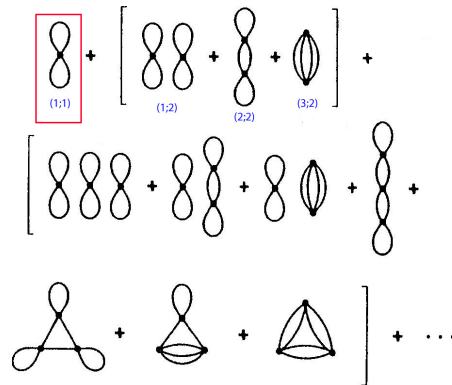
El esquema de Feynman para el cálculo de  $A(n)$  (los llamados **diagramas de vacío**) es:

- (a) Escribir todos los grafos cerrados posibles con  $2n$ -líneas y  $n$  vértices de 4 patas.
- (b) Para cada grafo:
  - i. Etiquetar los segmentos y los vértices.
  - ii. Calcular las formas posibles de construir el grafo con las etiquetas fijas a partir de  $n$ -vértices y  $2n$  segmentos etiquetados =  $a_1$ .
  - iii. Calcular las formas de cambiar las etiquetas en posiciones no equivalentes =  $a_2$

(c)  $A(n) = \sum_{i \in \text{grafos de orden } n} a_1(i; n) a_2(i; n) F(i; n)$

donde  $F(i)$  es el valor del grafo.

Por ejemplo, los grafos topológicamente diferentes para orden 1, 2 y 3 son:



- **Orden  $g$ :** Solo hay un grafo ((1) de la figura) cuyos factores de simetría son:  $a_1(1; 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$  y  $a_2(1; 1) = 1$ . El valor del grafo es:

$$F(1, 1) = VG(0) = V \int_{R^d} \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (11)$$

- **Orden  $g^2$ :** Tenemos tres grafos topológicamente independientes ((2), (3) y (4) de la figura). Los valores de los coeficientes de simetría son:

$$\begin{aligned} a_1(1; 2) &= (4!)^2 & a_2(1; 2) &= 6 \\ a_1(2; 2) &= 4(4!)^2 & a_2(2; 2) &= 12 \\ a_1(3; 2) &= 16(4!)^2 & a_2(3; 2) &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

**EJERCICIO:** Escribir los valores de los grafos de orden 2 ( $F(1; 2)$ ,  $F(2; 2)$  y  $F(3; 2)$ ). Calcular los términos combinatoriales para todos los grafos de  $g^3$ .

## 2. Cálculo perturbativo de las funciones de correlación:

De la misma forma que en el caso anterior se puede ver que el orden  $m$  en teoría de perturbaciones se puede escribir:

$$\langle \phi(\underline{x}_1) \dots \phi(\underline{x}_{2n}) \rangle = Q[0]^{-1} Q_G[0] \dots + \frac{(-g)^m}{(4!)^m} \frac{1}{2^n} \frac{1}{m!(n+2m)!} B(n, m) \dots$$

donde  $B(n, m)$  son todos los diagramas con (i)  $m$  vértices, (ii)  $2n$  puntos externos y (iii)  $n + 2m$  propagadores. Los factores de simetría correspondientes a cada grafo se calculan de forma similar a la de la función de partición. Podemos resaltar:

- Los términos  $B$  incluyen diagramas con subdiagramas de vacío (del tipo de los que aparecen en el desarrollo perturbativo de  $Q[0]$ ).
- Cuando tenemos en cuenta las contribuciones perturbativas de  $Q[0]$  desaparecen orden a orden los diagramas con inserciones de vacío. Esto no debe sorprender, todo diagrama cerrado tiene asociado una contribución de volumen  $V^n$  con  $n > 0$ . Las correlaciones son observables que deben de existir en el límite termodinámico  $V \rightarrow \infty$  por lo que TODAS esas contribuciones deben desaparecer orden a orden en la teoría de perturbaciones.

Calculemos un caso particular:

$$W_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \langle \phi(\underline{x}_1) \phi(\underline{x}_2) \rangle \quad (13)$$

En este caso los diagramas a tener en cuenta hasta orden  $g^2$  son:

y su expresión algebraica es:

$$W_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \int_{R^d} \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d} e^{i\underline{q} \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_2)} \left[ \frac{1}{q^2 + m^2} - \frac{g}{2} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \int_{R^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} + \dots \right] \quad (14)$$

Observar que a orden  $g$  los términos integrados son infinito si la dimension es mayor que 2. Este tipo de integrales aparecen orden a orden en la teoría de perturbaciones luego **tenemos una teoría de perturbaciones MAL DEFINIDA.**

**EJERCICIO:** Calcular  $W_4$  a segundo orden en  $g$ .

### 3. Dos apuntes más sobre correlaciones

Definimos el **Funcional de energía libre:**

$$F[J] = \ln \left[ \frac{Q[J]}{Q[0]} \right] \quad (15)$$

Si lo desarrollamos perturbativamente en  $J$ 's tenemos:

$$F[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\underline{x}_1 \dots d\underline{x}_n W_n^c(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) J(\underline{x}_1) \dots J(\underline{x}_n)$$

donde

$$W_n^c(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_n)} F[J] \Big|_{J=0} \quad (16)$$

Se puede demostrar que dadas las correlaciones  $W_c$  se pueden contruir las correlaciones  $W$ , por ejemplo:

$$\begin{aligned} W_1(\underline{x}) &= W_1^c(\underline{x}) \\ W_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= W_2^c(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + W_1^c(\underline{x}_1)W_1^c(\underline{x}_2) \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones  $W_n^c$  son el subconjunto de diagramas de  $W_n$  en los que



existe algún camino que conecte **TODOS** los puntos **externos**. Luego trabajar con  $W_n^c$  nos ahorra el esfuerzo de contabilizar perturbativamente el efecto de los diagramas desconectados.

Una última definición relevante, definimos la transformada de Legendre de  $F[J]$ :  $\Gamma[\bar{\phi}]$ :

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \int d\underline{x} \bar{\phi}(\underline{x}) J[\bar{\phi}; \underline{x}] - F[J[\bar{\phi}]] \quad (17)$$

donde  $J[\bar{\phi}]$  es la solución de la ecuación implícita:

$$\bar{\phi}(\underline{x}) = \frac{\delta F[J]}{\delta J(\underline{x})} \quad (18)$$

Sabemos que la transformada de Legendre es invertible y conocida  $\Gamma$  podemos conocer  $F$ :

$$F[J] = \int d\underline{x} \bar{\phi}[J; \underline{x}] J(\underline{x}) - \Gamma[\bar{\phi}[J]] \quad (19)$$

donde  $\bar{\phi}[J]$  es la solución de la ecuación implícita:

$$J(\underline{x}) = \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(\underline{x})} \quad (20)$$

Observar que, por definición:

$$\lim_{J \rightarrow 0} \frac{\delta F[J]}{\delta J(\underline{x})} = \langle \phi(\underline{x}) \rangle \equiv \bar{\phi}_{cl}(\underline{x}) \quad (21)$$

Obviamente si estamos por debajo de la temperatura crítica  $\bar{\phi}_{cl} \neq 0$  y si estamos por encima  $\bar{\phi}_{cl} = 0$ .

Este resultado, desde el punto de vista de  $\Gamma$  se lee:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(\underline{x})} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}_{cl}} = 0 \quad (22)$$

esto es los extremos del funcional  $\Gamma[\bar{\phi}]$  son los valores posibles de la magnetización.

Trabajar diagramáticamente con  $\Gamma$  tiene ventajas porque la teoría de perturbaciones correspondiente se basa en un subconjunto de los grafos de  $W_c$ , aquellos que son **irreducibles**, esto es, que si cortamos cualquiera de sus líneas internas no se rompen en dos. De hecho se puede explicitar la conexión entre  $W_c$ 's y  $\Gamma$ :

$$\int d\underline{y} \Gamma_2(\underline{y}, \underline{x}) W_2^c(\underline{y}, \underline{z}) = \delta(\underline{x} - \underline{z}) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & W_3^c(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) \\ &= - \int d\underline{y}_1 d\underline{y}_2 d\underline{y}_3 \Gamma_3(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3) W_2^c(\underline{y}_1, \underline{x}_1) W_2^c(\underline{y}_2, \underline{x}_2) W_2^c(\underline{y}_3, \underline{x}_3) \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_n(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}(\underline{x}_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}(\underline{x}_n)} \Gamma[\bar{\phi}] \Big|_{\bar{\phi}=0} \quad (24)$$

**EJERCICIO: Demostrar las anteriores expresiones.**

4. Por último es fácil demostrar como se transforma  $\Gamma_n$  bajo la acción del grupo  $T$ :

$$\hat{\Gamma}'_n(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_n) = \lambda^d Z(\lambda)^{n/2} \hat{\Gamma}_n(\underline{q}_1/\lambda, \dots, \underline{q}_n/\lambda) \quad (25)$$

donde

$$\hat{\Gamma}_n(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_n) = \hat{\Gamma}_n(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_n) \delta(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_n) \quad (26)$$

y  $\hat{\Gamma}_n$  es la transformada de Fourier de  $\Gamma_n(\underline{x})$ .

5. Para la teoría  $\phi^4$  podemos escribir las expresiones perturbativas de  $\hat{\Gamma}_n$ :

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_2(\underline{q}) &= q^2 + m^2 + \frac{g}{2} \int_{R^d} \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &- \frac{g^2}{4} \int_{R^d} \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} \int_{R^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \\ &- \frac{g^2}{6} \int_{R^d} \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(q + k - p)^2 + m^2} + O(g^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_4(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_4) &= g \\ &- \frac{g^2}{2} \sum_{(i,j) \in \Pi(4)} \int_{R^d} \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(q_i + q_j - p)^2 + m^2} + O(g^3)\end{aligned}$$

donde  $\Pi(4)$  son las 3 permutaciones diferentes de cuatro índices sabiendo que  $\sum q_i = 0$ .

## 2. Estrategia de Renormalización

Ahora ya tenemos los elementos esenciales para unir las piezas del puzle:

- **Regularizar la teoría:** En el caso del modelo  $\phi^4$  e inspirado en su relación con el modelo de Ising es natural pensar en la existencia de una escala microscópica que representa la red subyacente de lado  $a \equiv \Lambda^{-1}$ . Esto es, las integrales en el espacio de Fourier están limitadas de forma natural en la primera zona de Brillouin:  $q \in [-\pi/a, \pi/a] \simeq [-\Lambda, \Lambda]$ . La transformación  $T$  afecta a los coeficientes del hamiltoniano y al cutoff del problema:  $\Lambda \rightarrow \lambda\Lambda$ . El estudio

del punto fijo es equivalente a estudiar la teoría original cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Así las integrales divergentes o no se sustituyen de forma trivial:

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2} \rightarrow \int_{\Lambda} \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (27)$$

- **Renormalizar la teoría:** El objetivo es encontrar un punto fijo no trivial cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  con el agravante de que hemos de utilizar una teoría de perturbaciones. Si suponemos que ese punto fijo existe entonces:
  - (1) En el punto fijo debe de existir un parámetro efectivo  $g_R$  tal que cuando la dimensión  $d \rightarrow 4$  entonces  $g_R \rightarrow 0$  pues  $d = 4$  es la dimensión crítica de la teoría a partir de la cual el único punto fijo no trivial es el gaussiano.
  - (2) Es posible realizar una teoría de perturbaciones bien definida del punto fijo alrededor de la dimensión crítica.
  - (3) Debido que la estructura del hamiltoniano transformado es no trivial la única forma de establecer la existencia o no de un punto fijo es a través del estudio de las correlaciones. Así buscamos unas nuevas variables del problema TRANSFORMADO por  $T$ , basadas en valores de los observables de forma que la teoría de perturbaciones de cualquier función de correlación del sistema respecto esas nuevas variables no tenga elementos divergentes cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . La elección de esas nuevas variables es esencial y debe de ser coherente con la descripción de la situación física que se

desea. La relación entre variables viejas y nuevas se AJUSTA de forma que las divergencias desaparezcan cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

- **Estudiar la teoría resultante de forma perturbativa:** Esa teoría contiene, si todo se ha hecho correctamente, un punto fijo no trivial cuando estemos en un punto crítico y determinará el comportamiento crítico en las cercanías del punto fijo.

### 3. Renormalizar la teoría

Si definimos:

$$H[\phi; A, B, C, \Lambda] = \int_{\Lambda^{-1}} dx \left[ \frac{A}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{B}{2} \phi^2 + \frac{C}{4!} \phi^4 \right] \quad (28)$$

entonces, bajo la transformación  $T$ :

$$H[\phi; 1, m^2, g, \Lambda] \rightarrow H[\phi; \lambda^{d-2} Z(\lambda), \lambda^d Z(\lambda) m^2, \lambda^d Z(\lambda)^2 g; \lambda\Lambda]$$

donde utilizaremos:

$$Z(\lambda) = \lambda^{-2d_\phi} = \lambda^{2-d+\eta(g)} \quad (29)$$

donde  $d_\phi = (d-2)/2 - \eta(g)/2$  con  $\eta(0) = 0$  para garantizar que la recurrencia lleva a la teoría gaussiana a su punto fijo. De esta forma podemos conocer como se transforman las funciones  $\hat{\Gamma}_n$ :

$$\begin{aligned} & \hat{\Gamma}_n(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_n; \lambda^{d-2} Z(\lambda), \lambda^d Z(\lambda) m^2, \lambda^d Z(\lambda)^2 g, \lambda\Lambda) \\ &= \lambda^d Z(\lambda)^{n/2} \hat{\Gamma}_n(\underline{q}_1/\lambda, \dots, \underline{q}_n/\lambda; 1, m^2, g, \Lambda) \end{aligned} \quad (30)$$

**NOTAR:** en principio las funciones  $\Gamma_n$  dependen de un número INFINITO de parámetros del Hamiltoniano inicial:  $m^2, g, u(\phi^6), \dots$  y tendríamos que tenerlos en cuenta a la hora de definir las transformaciones. La estrategia que se utiliza es suponer transformaciones de  $\phi^4$  a  $\phi^4$  y luego estudiar el efecto que tendría el introducir un  $\phi^6$ , por ejemplo. En general, el resultado NO es trivial y el considerar la presencia de operadores irrelevantes MODIFICA los valores efectivos del Hamiltoniano no así su comportamiento asintótico con  $\lambda$ .

Observar que cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  las correlaciones transformadas por  $T$  divergen. Para evitarlo definimos unos NUEVOS PARAMETROS DEL SISTEMA:

$$m_R^2 = m^2 \frac{Z(\lambda; m_R^2, g_R)}{Z_m(\lambda; m_R^2, g_R)} \quad g_R = g \frac{Z(\lambda; m_R^2, g_R)^2}{Z_g(\lambda; m_R^2, g_R)} \quad (31)$$

vamos a elegir las funciones  $Z, Z_m$  y  $Z_g$  para eliminar las divergencias PERTURBATIVAMENTE. Suponemos:

$$\begin{aligned} Z(\lambda; m_R^2, g_R) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda; m_R^2) g_R^n \\ Z_m(\lambda; m_R^2, g_R) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda; m_R^2) g_R^n \\ Z_g(\lambda; m_R^2, g_R) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda; m_R^2) g_R^n \end{aligned} \quad (32)$$

Así:

$$m^2 = m_R^2 \left[ \frac{b_0}{a_0} + \frac{g_R}{a_0} \left( b_1 - \frac{a_1 b_0}{a_0} \right) + O(g_R^2) \right] \quad (33)$$

$$g = \frac{c_0}{a_0^2} g_R + O(g_R^2) \quad (34)$$

Ahora expresamos el comportamiento de  $\hat{\Gamma}_n$  en función de los nuevos parámetros del sistema. Veamos el ejemplo de  $\hat{\Gamma}_2$ :

$$\begin{aligned} & \hat{\Gamma}_2(\lambda q; \lambda^{d-2} Z, \lambda^d m_R^2 Z_m, \lambda^d g_R Z_g, \lambda \Lambda) \\ &= \lambda^d Z \left[ q^2 + m^2 + \frac{g}{2} \int_{\Lambda} \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} + O(g^2) \right] \end{aligned}$$

sustituyendo  $m^2$  y  $g$  por sus desarrollos en  $g_R$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \hat{\Gamma}_2(q; \lambda^{d-2} Z, \lambda^d m_R^2 Z_m, \lambda^d g_R Z_g, \lambda \Lambda) \\ &= a_0 \lambda^{d-2} q^2 + b_0 \lambda^d m_R^2 \\ &+ g_R \left[ b_1 \lambda^d m_R^2 + a_1 \lambda^{d-2} q^2 + \frac{c_0 \lambda^d}{2a_0} \int_{\Lambda} \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m_R^2 b_0/a_0} \right] + O(g_R^2) \end{aligned}$$

Queda claro ahora que podemos ajustar los valores de  $a$ 's  $b$ 's y  $c$ 's para eliminar cualquier divergencia que provenga de las integrales regularizadas en el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . En ese ajuste determinamos la relación entre  $(m, g)$  y  $(m_R, g_R)$ . Se observa que NO hay una forma única de elegir los coeficientes para curar esas divergencias. Además es conveniente dar un sentido físico a los nuevos parámetros del sistema por ello utilizamos la siguiente prescripción:

$$\hat{\Gamma}_2(q; \lambda^{d-2} Z, \lambda^d m_R^2 Z_m, \lambda^d g_R Z_g, \Lambda) = m_R^2 + q^2 + O(q^4) \quad (35)$$

**para TODO valor de  $g_R$ .** Con esta elección vemos que  $m_R^2$  no es más que el inverso de la longitud de correlación de la teoría transformada. Con el mismo espíritu elegimos:

$$\hat{\Gamma}_4(q's = 0; \lambda^{d-2} Z, \lambda^d m_R^2 Z_m, \lambda^d g_R Z_g, \Lambda) = g_R \quad (36)$$

utilizando las anteriores **condiciones de normalización** obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \lambda^{2-d} \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= -\frac{\lambda^{2-d}}{6} I_2(m_R^2, \lambda\Lambda) \\
b_0 &= \lambda^{-d} \\
b_1 &= -\frac{\lambda^{-d}}{2m_R^2} J_1(m_R^2, \lambda\Lambda) \\
b_2 &= \frac{\lambda^{-d}}{m_R^2} \left[ \frac{1}{6} I_0(0, m_R^2, \lambda\Lambda) - \frac{1}{4} J_1(m_R^2, \lambda\Lambda) J_2(m_R^2, \lambda\Lambda) \right] \\
c_0 &= \lambda^{-d} \\
c_1 &= \frac{3}{2} \lambda^{-d} J_2(m_R^2, \lambda\Lambda)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_2 &\equiv I_2(m_R^2, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_R^2)} \frac{1}{(p^2 + m_R^2)} \frac{1}{((k-p)^2 + m_R^2)^2} \\
J_1 &\equiv J_1(m_R^2, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_R^2)} \\
J_2 &\equiv J_2(m_R^2, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_R^2)^2} \\
I_0 &\equiv I_0(0, m_R^2, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_R^2)} \frac{1}{(p^2 + m_R^2)} \frac{1}{((k-p)^2 + m_R^2)}
\end{aligned}$$

y recuperamos las relaciones entre  $(m, g)$  y  $(m_R, g_R)$ :

$$\begin{aligned}
m^2 \lambda^2 &= m_R^2 \left[ 1 - \frac{g_R}{2m_R^2} J_1 + g_R^2 \left( \frac{1}{m_R^2} \left( \frac{1}{6} I_0 - \frac{1}{4} J_1 J_2 \right) + \frac{1}{6} I_2 \right) + O(g_R^3) \right] \\
g &= \lambda^{d-4} g_R \left[ 1 + \frac{3}{2} g_R J_2 + O(g_R^2) \right]
\end{aligned}$$



Es conveniente extraer el comportamiento respecto  $m_R$  de las integrales:

$$\begin{aligned} J_1 &= m_R^{d-2} \tilde{J}_1 \\ J_2 &= m_R^{d-4} \tilde{J}_2 \\ I_2 &= m_R^{2d-8} \tilde{I}_2 \\ I_0 &= m_R^{2d-6} \tilde{I}_0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= J_1(1, \lambda\Lambda/m_R^2) \\ \tilde{J}_2 &= J_2(1, \lambda\Lambda/m_R^2) \\ \tilde{I}_2 &= I_2(1, \lambda\Lambda/m_R^2) \\ \tilde{I}_0 &= I_0(1, \lambda\Lambda/m_R^2) \end{aligned}$$

de esta forma se pueden reescribir las anteriores relaciones

$$\begin{aligned} m^2 &= \eta^2 \left[ 1 - u\tilde{J}_1 + u^2 \left( \frac{1}{6}\tilde{I}_0 - \frac{1}{4}\tilde{J}_1\tilde{J}_2 + \frac{1}{6}\tilde{I}_2 \right) + O(u^3) \right] \\ g &= u\eta^{4-d} \left[ 1 + \frac{3}{2}u\tilde{J}_2 + O(u^2) \right] \end{aligned}$$

donde  $u = g_R m_R^{d-4}$  y  $\eta = m_R/\lambda$ .

- Se puede demostrar que orden a orden la serie perturbativa en función de  $u$  está bien definida para TODAS las funciones  $\Gamma_n$ .
- Será conveniente ELEGIR como parámetro perturbativo a  $u$ .
- Observamos que si fijamos  $m^2$  y  $g$  quedan TOTALMENTE determinadas  $\eta$  y  $u$  INDEPENDIENTEMENTE del valor

de  $\lambda$ , luego:

$$\begin{aligned} m_R &= \lambda\eta(m^2, g, \Lambda) \\ g_R &= u(m^2, g, \Lambda)\eta(m^2, g, \Lambda)^{4-d}\lambda^{4-d} \end{aligned}$$

La única posibilidad de tener un punto fijo **NO TRIVIAL** cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  es que  $\eta \rightarrow 0$ . Notar que en ese caso  $m_R = 0$  y  $g_R = 0$  aunque  $u = g_R m_R^{d-4} \rightarrow u^* > 0$  es finito en ese límite. Así el punto fijo no trivial es:

$$\eta^* = 0 \quad u^* > 0 \quad (37)$$

$m_R = 0$  indica el comportamiento crítico de las correlaciones en el punto fijo.

- **Observar que la estructura del flujo del Grupo de Renormalización a nivel Hamiltoniano es poco reveladora de la existencia de un punto fijo no trivial. Si**

$$H[\phi; A, B, C] = \int dx \left[ \frac{A}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{B}{2} \phi^2 + \frac{C}{4!} g\phi^4 \right]$$

observamos que bajo la transformación  $T$  obtenemos:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 1 - \frac{1}{6}u^2\tilde{I}_2 + O(u^3) \\ B(\lambda) &= \eta^2\lambda^2 \left[ 1 - u\tilde{J}_1 + u^2 \left( \frac{1}{6}\tilde{I}_0 - \frac{1}{4}\tilde{J}_1\tilde{J}_2 \right) + O(u^3) \right] \\ C(\lambda) &= (\eta\lambda)^{2(4-d)}u \left[ 1 + \frac{3}{2}u\tilde{J}_2 + O(u^2) \right] \end{aligned}$$

## 4. Búsqueda del punto fijo

Sabemos que

$$g = \eta^{4-d}F(u, \Lambda/\eta)$$

donde  $F$  se comporta bien en el límite  $\Lambda/\eta \rightarrow \infty$  y podemos obtener su expresión orden a orden en  $u$  para dimensiones  $d < 4$ .

Supongamos que existe un punto fijo no trivial. Entonces se debe de cumplir que

$$u = u(\eta), \quad u(0) = u^*$$

Notar que si  $\eta \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow u^*$  y para que exista un valor de  $g$  dado es necesario que  $\lim_{u \rightarrow u^*} F(u)^{-1} = 0$ . De esta forma  $u$  se comporta en las cercanías del punto fijo de la forma:

$$u(\eta) = u^* + A\eta^{4-d} \quad \eta \simeq 0 \quad (38)$$

Así:

$$G(u) = G(u^*) + G'(u^*)A\eta^{4-d} + \dots \quad (39)$$

donde  $G(u^*) = 0$  y  $g = [G'(u^*)A]^{-1}$ . Esto es, los ceros de la función  $G$  son los que nos dan los posibles valores de los puntos fijos. El problema es que sólo podemos obtener  $G$  en potencias de  $u$ .

Para extraer  $u^*$  es conveniente utilizar la función  **$\beta$  de Wilson**:

- $u = u^* + A\eta^{4-d} + O(\eta^{2(4-d)})$
- $\eta^2 \partial u / \partial \eta^2 \Big|_g = A(4-d)\eta^{4-d}/2 = (4-d)(u - u^*)/2 + O(u - u^*)^2$
- Se define la función Beta de Wilson:

$$\beta(u) \equiv \eta^2 \frac{\partial u}{\partial \eta^2} \Big|_g \quad (40)$$

- Obviamente por construcción  $\beta(u^*) = 0$

- Sabemos que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta^2} \right|_g \left. \frac{\partial \eta^2}{\partial g} \right|_u \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_\eta = -1 \quad (41)$$

Por lo que podemos relacionar la función  $\beta$  con la función  $F$ :

$$\beta(u) = -\eta^2 \left. \frac{\frac{\partial g}{\partial \eta^2}}{\frac{\partial g}{\partial u}} \right|_u = -\frac{1}{2}(4-d) \left[ \frac{d}{du} \ln F \right]^{-1} \quad (42)$$

- En nuestro caso:

$$F(u) = u \left[ 1 + \frac{3}{2}u\tilde{J}_2 + O(u^2) \right] \quad (43)$$

por lo que

$$\beta(u) = -\frac{1}{2}(4-d)u \left[ 1 - \frac{3}{2}\tilde{J}_2u + O(u^2) \right] \quad (44)$$

Observamos que

$$\beta(u) = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{2}{4-d} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha} \alpha^{(4-d)/2} \equiv J_2^*/(4-d)$$

Por lo que

$$\beta(u) = -\frac{1}{2}u \left[ 4-d - \frac{3}{2}J_2^*u + O(u^2) \right] \quad (45)$$

los ceros de la función beta se pueden encontrar de forma **PERTURBATIVA** si  $d \simeq 4 - \epsilon$  pues en ese caso la función beta es un **DOBLE** desarrollo perturbativo en  $\epsilon$  y en  $u$ . Así la solución  $\beta(u^*) = 0$  se puede expresar:

$$u^* = \frac{2(4-d)}{3J_2^*} + O(4-d)^2 \quad (46)$$