Mecánica Estadística

Licenciatura de Física

Fenómenos Críticos (4)

- **El Grupo de Renormalización. Definición de la transformación T**
- **Propiedades de la transformación T**
- **Ecuaciones de flujo**
- **Transformaciones infinitesimales**
- **Propiedades de un punto fijo**
- **Términos relevantes**
- **Aplicaciones: Teoría gausiana y Teorías con simetrías tipo Ising**

1. El Grupo de Renormalización

- **Sea el Hamiltoniano genérico:**

$$H[\phi; h] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{dn}} d\underline{x_1} \dots d\underline{x_n} h_n(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \phi(\underline{x_1}) \dots \phi(\underline{x_n}) \quad (1)$$

La función de partición Q contiene toda la información sobre las propiedades macroscópicas del sistema en equilibrio termodinámico:

$$Q[h] = \int D\phi \exp\left[-H[\phi; h]\right] \quad (2)$$

- **Sea T una transformación definida en el espacio de hamiltonianos H tal que:**

$$\exp\left[-H[\phi'; h']\right] = \int D\phi\, T[\phi'|\phi] \exp\left[-H[\phi; h]\right] \quad (3)$$

y

$$\int D\phi'\, T[\phi'|\phi] = 1 \quad (4)$$

Entonces esta transformación matiene el valor de la función de partición Q: $Q[h] = Q[h']$.

- **Dos ejemplos relevantes:**

$$\begin{aligned} T_1[\phi'|\phi] &= \prod_{\underline{x} \in R^d} \delta\left(\phi'(\underline{x}) - Z(\lambda)^{-1/2} \phi(\lambda \underline{x})\right) \\ T_2[\phi'|\phi] &= \prod_{\underline{x} \in R^d} \delta\left(\phi'(\underline{x}) - \phi(\underline{x}) - \lambda\right) \end{aligned}$$

Recurrencia para T_1: Si sustituimos T_1 en las expresiones anteriores tenemos:

$$e^{-H[\phi';h']} = \int D\phi \prod_{\underline{x}\in V'^d} \delta\left(\phi'(\underline{x}) - Z(\lambda)^{-1/2}\phi(\lambda\underline{x})\right) e^{-H[\phi;h]}$$

donde, por ilustrar mejor, hemos supuesto que antes de la transformación los campos se definen sobre un volumen finito: $x \in V$. De esta forma los campos después de la transformación se extienden sobre un nuevo volumen: $x \in V' = V/\lambda^d$. Es inmediato obtener la recurrencia de los coeficientes del Hamiltoniano H. Para ello tomamos un término genérico de H:

$$I_n = \int_{R^{dn}} d\underline{x_1}\dots d\underline{x_n} h_n(\underline{x_1},\dots,\underline{x_n})\phi(\underline{x_1})\dots\phi(\underline{x_n}) \tag{5}$$

podemos introducir el cambio de variables: $x_i = \lambda y_i$. De esta forma tenemos:

$$I_n = \lambda^{nd}\int_{R^{dn}} d\underline{y_1}\dots d\underline{y_n} h_n(\lambda\underline{y_1},\dots,\lambda\underline{y_n})\phi(\lambda\underline{y_1})\dots\phi(\lambda\underline{y_n}) \tag{6}$$

con esta expresión podemos efectuar la integral con la delta de Dirac sustituyendo $\phi(\lambda\underline{y}) \to Z(\lambda)^{1/2}\phi'(\underline{y})$. Identificando el resultado con un nuevo hamiltoniano con coeficientes h' podemos concluir que:

$$\begin{aligned} h_0' &= -\frac{V}{2\lambda^d}\ln Z(\lambda) + h_0 \\ h_n'(\underline{x_1},\dots,\underline{x_n}) &= \lambda^{nd} Z(\lambda)^{n/2} h_n(\lambda\underline{x_1},\dots,\lambda\underline{x_n}) \end{aligned}$$

EJERCICIO: Obtener la recurrencia para T_2.

- **Comportamiento de las funciones de correlación bajo la transformación: Sabemos que**

$$W_n(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \equiv \langle \phi(\underline{x_1}) \dots \phi(\underline{x_n}) \rangle = -n! \frac{\delta}{\delta h_n(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n})} \ln Q[h]$$

Si aplicamos la transformación podemos, de forma similar, definir las correlaciones calculadas con el nuevo hamiltoniano, que, en general, y a diferencia de Q que es invariante, serán diferentes:

$$W_n^\lambda(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \equiv \langle \phi'(\underline{x_1}) \dots \phi'(\underline{x_n}) \rangle_\lambda = -n! \frac{\delta}{\delta h'_n(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n})} \ln Q[h']$$

Puesto que dada la transformación T conoceremos la relación explícita entre h''s y h podemos hallar de forma sencilla la variación de W^λ en función de W. En particular, para la transformación T_1 tenemos:

$$\begin{aligned}
& W_n(\lambda\underline{x_1}, \dots, \lambda\underline{x_n}) = -n! \frac{\delta}{\delta h_n(\lambda\underline{x_1}, \dots, \lambda\underline{x_n})} \ln Q[h] \\
= \;& -n! \int d\underline{z_1} \dots d\underline{z_n} \frac{\delta h'_n(\underline{z_1}, \dots, \underline{z_n})}{\delta h_n(\lambda\underline{x_1}, \dots, \lambda\underline{x_n})} \frac{\delta}{\delta h'_n(\underline{z_1}, \dots, \underline{z_n})} \ln Q[h'] \\
= \;& \int d\underline{z_1} \dots d\underline{z_n} \frac{\delta h'_n(\underline{z_1}, \dots, \underline{z_n})}{\delta h_n(\lambda\underline{x_1}, \dots, \lambda\underline{x_n})} W_n^\lambda(\underline{z_1}, \dots, \underline{z_n}) \\
= \;& \lambda^{nd} Z(\lambda)^{n/2} \int d\underline{z_1} \dots d\underline{z_n} \prod_{i=1}^{n} \delta(\lambda\underline{z_i} - \lambda\underline{x_i}) W_n^\lambda(\underline{z_1}, \dots, \underline{z_n}) \\
= \;& Z(\lambda)^{n/2} W_n^\lambda(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \qquad (7)
\end{aligned}$$

1.1 Propiedades de la transformación T

- **La iteración sucesiva de una transformación del tipo T se denomina esquema de renormalización.**
- **En general, una transformación T estará parametrizada formando un conjunto uniparamétrico:**

$$T = T_\lambda(\phi'|\phi) \tag{8}$$

Este conjunto no forma (en general) un grupo con la operación composición. Esto es:

$$T_\lambda \circ T_\lambda \neq T_{g(\lambda)} \tag{9}$$

donde g es una función real univaluada.

Más explícitamente. Sean dos aplicaciones sucesivas de la transformación:

$$\begin{aligned} e^{-H[\phi';h']} &= \int D\phi\, T_\lambda[\phi'|\phi] e^{-H[\phi;h]} \\ e^{-H[\phi'';h'']} &= \int D\phi'\, T_\lambda[\phi''|\phi'] e^{-H[\phi';h']} \end{aligned}$$

donde λ representa el parámetro de la transformación. Ésta la podemos escribir:

$$e^{-H[\phi'';h'']} = \int D\phi \left[\int D\phi'\, T_\lambda[\phi''|\phi'] T_\lambda[\phi'|\phi] \right] e^{-H[\phi;h]} \tag{10}$$

Podemos definir la transformación efectiva $\tilde{T}$ como aquella que resulta de la aplicación sucesiva de dos transformaciones T_λ:

$$\tilde{T}_\lambda[\phi''|\phi] = \int D\phi'\, T_\lambda[\phi''|\phi'] T_\lambda[\phi'|\phi] \tag{11}$$

Es obvio que en general NO SE TIENE PORQUE CUMPLIR que $\tilde{T}$ PERTENEZCA a la familia de las transformaciones T, esto es:

$$\tilde{T}_\lambda[\phi'|\phi] \neq T_{g(\lambda)}[\phi'|\phi] \tag{12}$$

donde g es una función de R en R.

- **Ejemplo: T_1. En este caso tenemos que**

$$\tilde{T}_\lambda[\phi''|\phi] = \prod_{\underline{x}\in R^d} \delta\left(\phi''(\underline{x}) - Z(\lambda)^{-1}\phi(\lambda^2\underline{x})\right)$$

Vemos que T_1 formará un grupo uniparamétrico si se cumple que

$$Z(\lambda^2) = Z(\lambda)^2 \tag{13}$$

esto es si $Z(\lambda) = \lambda^\theta$.

- **Ejemplo: T_2. En este caso se puede demostrar que**

$$\tilde{T}_\lambda[\phi''|\phi] = T_{2\lambda}[\phi''|\phi] \tag{14}$$

y por lo tanto forma un grupo uniparamétrico.

1.2 Ecuaciones de flujo

De ecuación de recurrencia para las correlaciones podemos deducir una ecuación que indique la variabilidad del resultado si cambiamos el parámetro λ. Si tomamos $\underline{y} = \lambda\underline{x}$ la ecuación de recurrencia se puede escribir:

$$W_n(\underline{y_1},\ldots,\underline{y_n}) = Z(\lambda)^{n/2}W_n^\lambda(\underline{y_1}\lambda^{-1},\ldots,\underline{y_n}\lambda^{-1}) \tag{15}$$

Si derivamos la anterior expresión respecto de λ: la parte izquierda NO depende de λ por lo que su derivada debe

de ser igual a cero. De la parte derecha obtenemos una ecuación diferencial que nos dice la variabilidad de W^λ con λ:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} W_n^\lambda(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) =$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n} \underline{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x_i}} - n \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z(\lambda) \right] W_n^\lambda(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n})$$

donde la condición inicial es $W_n^1 = W_n$. Esta es la llamada ECUACIÓN DEL GRUPO DE RENORMALIZACION

De igual forma podemos obtener la ecuación correspondiente a los coeficientes h del Hamiltoniano:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} h_n^\lambda(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) =$$
$$\left[nd + \sum_{i=1}^{n} \underline{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x_i}} + n \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z(\lambda) \right] h_n^\lambda(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n})$$

1.3 Transformaciones infinitesimales

Supongamos que deseamos realizar una transformación infinitesimal usando T_1. Para ello tomamos

$$\lambda = e^\delta \qquad \delta \simeq 0 \tag{16}$$

Sabemos que si iteramos l veces T_1, la transformación efectiva es del tipo T_1 con:

$$\tilde{\lambda} = e^{l\delta} \qquad \tilde{Z}(\tilde{\lambda}) = \left[Z(e^\delta) \right]^l \tag{17}$$

Si realizamos ahora el límite $\delta \to 0$ y $l \to \infty$ de forma que

$s = l\delta$ es finito, tenemos

$$\begin{aligned}
\log \tilde{Z} &= \lim_{l\to\infty} \left[l \log Z(1+\delta+O(\delta^2)) \right] \\
&= \lim_{l\to\infty} \left[l \log Z \left(1 + \frac{s}{l} + O\left(\frac{s}{l}\right)^2 \right) \right] \\
&= \lim_{l\to\infty} \left[l \log \left(1 + Z'(1)\frac{s}{l} + O\left(\frac{s}{l}\right)^2 \right) \right] \\
&= Z'(1)s \qquad (18)
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $Z(1) = 1$. En conclusión, la transformación efectiva $\tilde{T}_1$ en ese límite es tal que dado $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{Z}(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^{-2d_\phi} \qquad (19)$$

donde hemos definido $d_\phi = -Z'(1)/2$.

NOTAR (1): La transformación efectiva con $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{Z}(\tilde{\lambda})$ SI QUE FORMA UN GRUPO UNIPARAMETRICO puesto que si la aplicamos dos veces seguidas $\tilde{Z}(\tilde{\lambda}^2) = \left[\tilde{Z}(\tilde{\lambda})\right]^2$.

NOTAR (2): Si aplicamos n veces esta transformación $\tilde{T}_1$:

$$\tilde{Z}(\tilde{\lambda}^n) = \left[\tilde{Z}(\tilde{\lambda})\right]^n \qquad (20)$$

luego es EQUIVALENTE iterar la transformación $\tilde{T}_1$ o estudiar el comportamiento de una sola iteración para $\tilde{\lambda}$ arbitraria.

NOTAR (3): La ecuación de evolución de las correlaciones o de los coeficientes del hamiltoniano vienen dados por su respectiva ecuación del Grupo de Renormalización. A partir de ahora trabajaremos con $\tilde{T}_1$.

1.4 Propiedades de un punto fijo

Supongamos que la recurrencia infinitesimal T_1 nos indica la existencia de un punto fijo cuando $\lambda \to \infty$. Éste debe de cumplir (por definición que es invariante respecto de la ecuación de evolución:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W_n^{\lambda}(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n})\bigg|_{\lambda \to \infty} = 0 \tag{21}$$

lo que implica

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x_i}} W_n^* = -n d_\phi W_n^* \tag{22}$$

donde $\lim_{\lambda \to \infty} W_n^{\lambda} = W_n^*$

Ahora podemos aplicar el Lema de Euler que dice que la solución de esa ecuación diferencial es una función homogénea de grado $-nd_\phi$.

Demostración:

Sea una función homogénea de grado A: $f(tx, ty) = t^A f(x, y)$. Derivando respecto a t la anterior expresión y haciendo $t = 1$ tenemos que f satisface la ecuación diferencial: $(x\partial_x + y\partial_y) f(x, y) = A f(x, y)$.

De esta forma W_n^* tendrá la forma:

$$W_n^*(\mu \underline{x_1}, \ldots, \mu \underline{x_n}) = \mu^{-nd_\phi} W_n^*(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \tag{23}$$

Si fijamos el valor de $\underline{x_i} = \underline{a}$ con un vector $\underline{a}$ arbitrario, vemos que todas las funciones de correlación asociadas a la teoría del punto fijo son de tipo potencial (invariantes de escala) o nulas.

También podemos conocer como escalan con la distancia las funciones de correlación de la teoría inicial :

$$W_n(\mu\underline{x_1},\ldots,\mu\underline{x_n}) = Z(\mu)^{n/2}W_n^{\mu} \simeq \mu^{-nd_\phi}W_n^*(\underline{x_1},\ldots,\underline{x_n}) \quad \mu\to\infty$$

esto es, dada una teoría (hamiltoniano), si los valores de sus parámetros son tales que bajo la acción de la recurrencia el hamiltoniano converge a una teoría no trivial (con correlaciones no nulas) estamos en un punto crítico

NOTAR: Existen siempre puntos fijos triviales que son aquellos en que $W^* = 0$. Si la teoría inicial no es crítica la recurrencia no nos puede llevar a un punto fijo no trivial pues sería incoherente con el comportamiento esperado. Por ello debe de llevarnos a un punto fijo trivial. Luego, un punto fijo no trivial es un punto silla en el espacio de los parámetros del hamiltoniano.

NOTAR(2): Existencia de un punto crítico presupone la existencia de una recurrencia que lleva a la teoría crítica a un punto fijo.

2. Términos relevantes

Para estudiar las estructuras posibles de un hamiltoniano en un punto fijo es conveniente trabajar en el espacio de Fourier de los campos e interacciones. Definimos:

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{x}) &= \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d}\exp\{i\underline{q}\cdot\underline{x}\}\hat{\phi}(\underline{q}) \\
h_n(\underline{x_1},\ldots,\underline{x_n}) &= \int \frac{d\underline{q_1}}{(2\pi)^d}\cdots\frac{d\underline{q_n}}{(2\pi)^d}\exp\{i\sum_{\alpha=1}^{n}\underline{x_\alpha}\cdot\underline{q_\alpha}\}\,\hat{h}_n(\underline{q_1},\ldots,\underline{q_n})
\end{aligned}$$

De esta forma, nuestro hamiltoniano original se expresa:

$$H[\hat{\phi};\hat{h}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{dn}} \frac{d\underline{q}_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d\underline{q}_n}{(2\pi)^d} \hat{h}_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n)\hat{\phi}(-\underline{q}_1)\ldots\hat{\phi}(-\underline{q}_n) \tag{24}$$

de forma equivalente se puede demostrar (DEMOSTRARLO) que la transformación T_1 en función de $\hat{\phi}$ se escribe:

$$T_1[\hat{\phi}'|\hat{\phi}] = \prod_{\underline{q}\in R^d} \delta\left(\hat{\phi}'(\underline{q}) - \hat{Z}(\lambda)^{-1/2}\hat{\phi}\left(\frac{\underline{q}}{\lambda}\right)\right) \tag{25}$$

donde

$$\hat{Z}(\lambda) = \lambda^{2d} Z(\lambda) \tag{26}$$

Siguiendo los mismos pasos que en el espacio real obtenemos las recurrencias:

$$\begin{aligned} \hat{h}'_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n) &= Z(\lambda)^{n/2}\hat{h}_n(\underline{q}_1/\lambda,\ldots,\underline{q}_n/\lambda) \\ \hat{W}'_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n) &= \lambda^{-nd}Z(\lambda)^{-n/2}\hat{W}_n(\underline{q}_1/\lambda,\ldots,\underline{q}_n/\lambda) \end{aligned}$$

donde

$$\hat{W}_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n) = \langle\hat{\phi}(\underline{q}_1)\ldots\hat{\phi}(\underline{q}_n)\rangle \tag{27}$$

Vamos a suponer ahora que nuestro hamiltoniano tiene las siguientes propiedades:

1. **Invariancia traslacional:**

   $$h_n(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = h_n(\underline{x}_1+\underline{a},\ldots,\underline{x}_n+\underline{a}) \quad \forall\underline{a} \tag{28}$$

   esto implica

   $$\hat{h}_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n) = \hat{u}_n(\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n)\delta(\underline{q}_1+\ldots+\underline{q}_n) \tag{29}$$

2. **Interacción h_n de corto alcance: Lo que implica que $\hat{u}$'s son funciones analíticas en q's alrededor del origen.**

3. **Isotropía: Que implica que $\hat{u}_n$'s son funciones de**

$$\underline{q}^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \underline{q_\alpha}^2 \tag{30}$$

Para este tipo de Hamiltonianos (los más comunes) la recurrencia de las $\hat{h}$'s se convierten en recurrencias de $\hat{u}$'s:

$$\hat{u}'_n(\underline{q_1}, \ldots, \underline{q_n}) = \lambda^d Z(\lambda)^{n/2} \hat{u}_n(\underline{q_1}/\lambda, \ldots, \underline{q_n}/\lambda) \tag{31}$$

y la ecuación del grupo de renormalización es:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{u}_n^\lambda(\underline{q_1}, \ldots, \underline{q_n}) = \left[-\sum_{i=1}^{n} \underline{q_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{q_i}} + d - n d_\phi \right] \hat{u}_n^\lambda(\underline{q_1}, \ldots, \underline{q_n})$$

donde hemos utilizado el hecho de que $Z(\lambda) = \lambda^{-2d_\phi}$. Utilizando la propiedad de isotropía podemos escribir:

$$\hat{u}_n^\lambda(\underline{q_1}, \ldots, \underline{q_n}) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_{n,m}^\lambda \left(\underline{q}^2\right)^m \tag{32}$$

y las ecuaciones del grupo para $\hat{u}_n$ se rompen en ecuaciones de flujo para $\hat{u}_{n,m}$:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{u}_{n,m}^\lambda = \left(-2m + d - n d_\phi\right) \hat{u}_{n,m}^\lambda \tag{33}$$

cuya solución es:

$$\hat{u}_{n,m}^\lambda = \lambda^{-2m+d-nd_\phi} \hat{u}_{n,m} \tag{34}$$

Para hallar puntos fijos hemos de fijar el valor de d_ϕ. Podemos estudiar varios casos:

1. **$d_\phi = d$: $\hat{u}_{n,m}^\lambda = \lambda^{-2m+d(1-n)} \hat{u}_{n,m}$.**

$\hat{u}_{n,m}$	**m=0**	**m=1**
n=1	λ^0	**0**
n=2	**0**	**0**

Asi, el Hamiltoniano del punto fijo es:

$$H[\phi]^* = B \int d\underline{x}\, \phi(\underline{x}) \tag{35}$$

que es un punto fijo TRIVIAL y, por lo tanto no esta asociado a criticalidad.

2. $d_\phi = d/2$**:** $\hat{u}^\lambda_{n,m} = \lambda^{-2m-d(n/2-1)} \hat{u}_{n,m}$.

$\hat{u}_{n,m}$	**m=0**	**m=1**
n=1	$\lambda^{d/2}$	**0**
n=2	λ^0	**0**

En este caso los términos dominantes del Hamiltoniano para $\lambda \to \infty$ **son:**

$$H[\phi] = \int d\underline{x} \left[B\lambda^{d/2}\phi(\underline{x}) + m^2\phi(\underline{x})^2 \right] \tag{36}$$

Observar que NO existe un punto fijo trivial

3. $d_\phi = (d-2)/2$**:** $\hat{u}^\lambda_{n,m} = \lambda^{-2m+n-d(n/2-1)} \hat{u}_{n,m}$.

$\hat{u}_{n,m}$	**m=0**	**m=1**	**m=2**
n=1	$\lambda^{d/2+1}$	**0**	**0**
n=2	λ^2	λ^0	**0**
n=3	$\lambda^{3-d/2}$ $(d \leq 6)$	$\lambda^{1-d/2}$ $(d \leq 2)$	**0**
n=4	λ^{4-d} $(d \leq 4)$	λ^{2-d} $(d \leq 2)$	**0**
n=5	$\lambda^{5-3d/2}$ $(d \leq 10/3)$	$\lambda^{3-3d/2}$ $(d \leq 2)$	$\lambda^{1-3d/2}$ $(d \leq 2/3)$
n=6	λ^{6-2d} $(d \leq 3)$	λ^{4-2d} $(d \leq 2)$	λ^{2-2d} $(d \leq 1)$
n=7	...	...	...

Observar que, dependiendo de la dimensión aparecen más términos que divergen o no. En cualquier caso vemos que NO CONSEGUIMOS QUE UNOS CUANTOS SE ESTABILICEN y el resto desaparezcan. Luego no existe (estrictamente hablando) un punto fijo de la transformación.

Definimos OPERADORES RELEVANTES como aquellos que bajo la tranformación divergen o se estabilizan, i.e. van como λ^n con $n \geq 0$,

Teoría gausiana

El Hamiltoniano de partida es

$$H[\phi] = \int d\underline{x} \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \tag{37}$$

Si expresamos el Hamiltoniano en el espacio de Fourier tenemos que sólo son diferentes de cero los coeficientes:

$$\hat{u}_{2,0} = m^2 \quad \hat{u}_{2,1} = \frac{1}{2} \tag{38}$$

Esto es, si elegimos el caso 2 ($d_\phi = d/2$) obtenemos si $\hat{u}_{2,0} \neq 0$:

$$H[\phi]^* = m^2 \int d\underline{x}\, \phi(\underline{x})^2 \tag{39}$$

que es un PUNTO FIJO TRIVIAL (observar que $W_n(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) = 0$ si los puntos son distintos).

Sin embargo, si $m^2 = 0$, para obtener alguna teoría debemos de utilizar el caso 3 ($d_\phi = (d-2)/2$) con el que obten-

emos el punto fijo NO TRIVIAL:

$$H[\phi]^* = \hat{u}_{2,1} \int d\underline{x}\ [\nabla\phi(\underline{x})]^2 \tag{40}$$

Esto es, el coeficiente m^2 hace el papel análogo a $T - T_c$.

La teoría gausiana se puede resolver exáctamente y, por lo tanto, podemos comprobar las predicciones sobre el comportamiento de las correlaciones.

La función de partición que queremos resolver es:

$$Q_G[\hat{J}] = \int D\hat{\phi}\ \exp\left[-\int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d}\left[\frac{1}{2}(\underline{q}^2 + m^2)\hat{\phi}(\underline{q})\hat{\phi}(-\underline{q}) + \hat{J}(-\underline{q})\hat{\phi}(\underline{q})\right]\right]$$

donde hemos incluido un término de campo externo $\hat{J}$ que nos permitirá calcular con facilidad las correlaciones.

Si realizamos el cambio de variables:

$$\hat{\phi}(\underline{q}) \rightarrow \hat{\phi}(\underline{q}) - (\underline{q}^2 + m^2)^{-1}\hat{J}(\underline{q}) \tag{41}$$

obtenemos

$$Q_G[\hat{J}] = Q_G[0]\exp\left[\frac{1}{2}\int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d}\frac{\hat{J}(\underline{q})\hat{J}(-\underline{q})}{\underline{q}^2 + m^2}\right] \tag{42}$$

Podemos ahora estudiar las funciones de correlación, por ejemplo, a dos cuerpos:

$$\begin{aligned}\langle\phi(0)\phi(\underline{x})\rangle &= \int \frac{d\underline{q}_1 d\underline{q}_2}{(2\pi)^{2d}}\, e^{i\underline{q}_2\cdot\underline{x}}\, \frac{\delta}{\delta\hat{J}(-\underline{q}_1)}\frac{\delta}{\delta\hat{J}(-\underline{q}_2)}\frac{Q[\hat{J}]}{Q[0]}\bigg|_{\hat{J}=0} \\ &= \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\underline{q}\cdot\underline{x}}}{\underline{q}^2 + m^2}\end{aligned} \tag{43}$$

Esta integral ya la estudiamos cuando estudiabamos las correlaciones en las teorías de campo medio. Obteníamos:

$$\begin{aligned}\langle\phi(0)\phi(\underline{x})\rangle &= -\frac{1}{4\pi^{d/2}}\Gamma(d/2-1)\frac{1}{|x|^{d-2}} \quad \textbf{si} \quad m^2=0 \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left(\frac{\sqrt{m^2}}{|\underline{x}|}\right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(\sqrt{m^2}|x|) \quad \textbf{si} \quad m^2\neq 0\end{aligned}$$

donde K es la función de Bessel de segundo orden.

El Grupo de Renormalización predice:

$$W_2(\underline{0},\mu\underline{x}) \simeq \mu^{-2d_\phi} W_2^*(\underline{0},\mu\underline{x}) \tag{44}$$

El único punto fijo NO trivial lo obteníamos cuando $d_\phi = (d-2)/2$ y $m^2=0$ y, por lo tanto:

$$W_2(\underline{0},\mu\underline{\hat{a}}) \simeq \mu^{-(d-2)} \tag{45}$$

que es PRECISAMENTE el comportamiento que hemos obtenido del modelo gausiano en su PUNTO CRITICO $m^2=0$.

Teorías tipo Ising

Son modelos representados por teorías continuas con simetría:

$$\phi \longrightarrow -\phi \tag{46}$$

esto es, los términos con un número impar de campos en su hamiltoniano son cero: $\hat{u}_{2n+1}=0$.

Observamos que

1. **Ninguna d_ϕ es capaz de generarnos un punto fijo NO trivial.**

2. $d_\phi = (d-2)/2$ **es una transformación que nos determina un conjunto finito de operadores RELEVANTES cuya estructura depende de la dimensión:**

– $d > 4$**:**

$$H^\lambda[\phi] = \int d\underline{x} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \lambda^2 \frac{m^2}{2}\phi^2\right]$$

– $3 < d \leq 4$**:**

$$H^\lambda[\phi] = \int d\underline{x} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \lambda^2 \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!} g \lambda^{4-d} \phi^4\right]$$

– $d = 3$**:**

$$H^\lambda[\phi] = \int d\underline{x} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \lambda^2 \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{4!} g \lambda \phi^4 + \frac{1}{6!} s \phi^6\right]$$

3. OBSERVAR: cualquier teoría inicial con esta simetría se convierte, para $\lambda \to \infty$ **en una** ϕ^2**,** ϕ^4**,.... dependiendo de la dimensión. Esto es, sólo se conservan los TÉRMINOS RELEVANTES bajo la transformación. El comportamiento crítico de esos sistemas dependerá de la forma de esos Hamiltonianos intermedios. Esperamos que todo Hamiltoniano que tenga una misma estructura intermedia bajo la transformación tenga el mismo comportamiento crítico. Esta es la llamada PROPIEDAD DE UNIVERSALIDAD. Para obtener el comportamiento crítico de un sistema solo hemos de idear un método para extraer la información de un sistema con esa estructura intermedia.**