

# Mecánica Estadística

Licenciatura de Física

## Fenómenos Críticos (3)

- Como reparar series perturbativas mal definidas
- Análisis asintótico de ecuaciones diferenciales
- Conocer sin resolver, primera aproximación: Ley de los grandes números y Teorema del límite central
- Segunda aproximación: Integrales desconocidas

## 1. Como reparar series perturbativas mal definidas

- [B. Delamotte, \*A hint of renormalization\*, hep-th/0212049 \(2003\).](#)
- Sea una teoría que por construcción tiene un solo parámetro libre,  $g_0$ .
- Sea  $F(x; g_0)$  una función que representa una cantidad física.
- Supongamos que podemos deducir  $F$  perturbativamente de nuestra teoría:

$$F(x; g_0) = g_0 + g_0^2 F_1(x) + g_0^3 F_2(x) + O(g_0^4) \quad (1)$$

y nos encontramos que, término a término las funciones  $F_i$  son patológicas, i.e. infinitas. Por ejemplo:

$$F_1(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t+x} \quad (2)$$

- Obviamente  $F(x; g_0)$  es un observable físico por lo que **debe de ser finito** para casi todo  $x$  y  $g_0$ . Luego la serie perturbativa no está bien definida en función de  $g_0$ .
- **NOTAR:**  $g_0$  NO es un observable. De hecho dado  $x = \mu$  y midiendo  $F(\mu; g_0)$ , fijamos el valor de  $g_0$  para **TODO**  $x$ .
- **Hipótesis de renormalizabilidad:** Si parametrizamos nuestra teoría en función de una cantidad física (adecuada), las series perturbativas correspondientes estarán bien definidas.
- Un parámetro perturbativo adecuado es, por ejemplo, el valor del observable en un punto:

$$g_R = F(\mu; g_0) \quad (3)$$

- El objetivo es pues invertir la anterior expresión y obtener  $g_0$  como función de  $g_R$ . Luego sustituir en la serie perturbativa original y ver si la serie resultante está bien definida tomando  $g_R$  como parámetro perturbativo.
- Previamente hay que **REGULARIZAR** la serie de forma que tenga sentido matemático la manipulación de las series. Definimos:

$$F_\Lambda(x; g_0) = g_0 + g_0^2 F_{1,\Lambda}(x) + g_0^3 F_{2,\Lambda}(x) + O(g_0^3) \quad (4)$$

donde  $F_{i,\Lambda}$  se eligen de forma que  $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_{i,\Lambda} = F_i$ . Por ejemplo

$$F_{1,\Lambda}(x) = \int_0^\Lambda \frac{dt}{t+x} \quad (5)$$

- Supongamos

$$g_0 = g_R + a_2 g_R^2 + a_3 g_R^3 + O(g_R^4) \quad (6)$$

Sustituyendo en la serie perturbativa:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(x; g_R) &= g_R + (a_2 + F_{1,\Lambda}(x)) g_R^2 \\ &+ [a_3 + 2a_2 F_{1,\Lambda}(x) + F_{2,\Lambda}(x)] + O(g_R^4) \end{aligned} \quad (7)$$

Hallamos los coeficiente  $a$ 's al aplicar la definición de  $g_R$ :

$$\begin{aligned} g_R &= g_R + (a_2 + F_{1,\Lambda}(\mu)) g_R^2 \\ &+ [a_3 + 2a_2 F_{1,\Lambda}(\mu) + F_{2,\Lambda}(\mu)] + O(g_R^4) \end{aligned} \quad (8)$$

lo que nos da, orden a orden:

$$\begin{aligned} a_2 &= -F_{1,\Lambda}(\mu) \\ a_3 &= 2F_{1,\Lambda}(\mu)^2 - F_{2,\Lambda}(\mu) \end{aligned} \quad (9)$$

- Finalmente, la serie perturbativa en función de  $g_R$  es:

$$\begin{aligned}
 F_\Lambda(x; g_R) &= g_R + (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)) g_R^2 \\
 &+ [-2F_{1,\Lambda}(\mu) (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)) + F_{2,\Lambda}(x) - F_{2,\Lambda}(\mu)] \\
 &+ O(g_R^4)
 \end{aligned}$$

- **Ejercicio:** Demostrar que con la función particular  $F_1$  elegida, el término  $g_R^2$  es finito. Hallar su forma explícita.
- **NOTAR:** El proceso recursivo de eliminación de divergencias solo es posible si estas tienen una estructura PRECISA.
- Se dice que una teoría es RENORMALIZABLE si todas las divergencias de las series perturbativas de sus observables pueden ser eliminadas recursivamente redefiniendo los parámetros independientes de la teoría.

## 2. Análisis asintótico de ecuaciones diferenciales

- Sea una ecuación diferencial, por ejemplo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \epsilon \frac{dx}{dt} = 0 \tag{10}$$

nos preguntamos por el comportamiento de su solución para  $t \rightarrow \infty$  y  $\epsilon > 0$ .

- En este ejemplo la respuesta es trivial puesto que podemos hallar analíticamente la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = Ae^{-\epsilon t/2} \sin \left[ \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} t + \theta \right] \tag{11}$$

donde  $A$  y  $\theta$  son determinadas por la condición inicial.

- En general, no se conocen las soluciones analíticas de una ecuación diferencial no lineal dada y el reto es extraer en estos casos información sobre el comportamiento de las soluciones. Utilizamos el anterior ejemplo para desarrollar una estrategia general.
- **Teoría de perturbaciones:** Es la primera aproximación para extraer información. Supongamos:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (12)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial podemos, orden a orden en  $\epsilon$  encontrar las funciones  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $\dots$ , así obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) = & A_0 \sin(t + \theta_0) - \epsilon \frac{A_0}{2} (t - t_0) \sin(t + \theta_0) \\ & + \epsilon^2 \frac{A_0}{8} [(t - t_0)^2 \sin(t + \theta_0) - (t - t_0) \cos(t + \theta_0)] + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

donde  $A_0$  y  $\theta_0$  se fijan dando  $x(t_0)$  y  $\dot{x}(t_0)$ .

Observamos que, dado un  $\epsilon > 0$ , si  $t - t_0 > \epsilon^{-1}$ , la solución perturbativa no tiene sentido. **¿Como conocer el comportamiento asintótico de  $x(t)$ ?**

Si comparamos con el anterior capítulo, el desarrollo perturbativo que tenemos es similar considerar que  $t_0$  regulariza la teoría pero cuando tiende a infinito la serie perturbativa está mal definida. Para resolver esto debemos de redefinir el acoplamiento perturbativo  $\epsilon t_0$ .

- **Referencias:**

- L-Y Chen, N. Goldenfeld y Y. Oono, *Renormalization Group Theory for Global Asymptotic Analysis*, **Phys. Rev. Lett.** **73**, 1311 (1994).
- L-Y Chen, N. Goldenfeld y Y. Oono, *Renormalization Group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers and reductive perturbation theory*, **Phys. Rev. E** **54**, 376 (1994).
- T. Kunihiro, *The Renormalization Group method applied to Asymptotic Analysis of Vector Fields*, **hep-th/9609045** (1996).
- M. Iwasa y K. Nozaki, *A Method to Construct Asymptotic Solutions Invariant under the Renormalization Group*, **cond-mat/0610331** (2006).
- R.E. Lee DeVille, A. Harkin, M. Holzer, K. Josic y T.J. Kaper, *Analysis of a Renormalization Group Method for Solving Perturbed Ordinary Differential Equations*, **preprint** (2006).

● **Hechos:** Sea

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\underline{x}) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

y dado  $t_0$ ,  $\underline{w}(t_0)$  una familia de condiciones iniciales. Entonces

1.

$$x_i(t; t_0, \underline{w}(t_0)) = w_i(t_0) + \int_{t_0}^t ds F_i(\underline{x}(s; t_0, \underline{w}(t_0))) \quad (14)$$

y

$$x_i(t_0; t_0, \underline{w}(t_0)) = w_i(t_0) \quad (15)$$

2. Si  $\frac{dx_i(t;t_0,\underline{w}(t_0))}{dt_0} = 0 \quad \forall t$ , entonces  $\underline{w}(t)$  es solución de la ecuación diferencial dada. **Ejercicio: Demostrarlo**

● **Método CGO:**

1. Se define  $\tau \in [t_0, t]$  (una nueva condición inicial) con el objetivo re-expresar las series perturbativas en función de  $\tau$ , absorbiendo toda dependencia en  $t_0$  en las nuevas constantes de integración.

Definimos

$$\begin{aligned}A_0 &= Z_1(t_0, \tau)A(\tau) \\ \theta_0 &= \theta(\tau) + Z_2(t_0, \tau)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Z_1(t_0, \tau) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n a_n(t_0, \tau) \\ Z_2(t_0, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n b_n(t_0, \tau)\end{aligned}$$

Donde  $A(\tau)$  y  $\theta(\tau)$  son las nuevas condiciones iniciales.

**La solución perturbativa de la ecuación diferencial queda:**

$$\begin{aligned}
x(t) = & A(\tau) \sin(t + \theta(\tau)) \left[ 1 + \epsilon a_1 - \frac{\epsilon}{2}(\tau - t_0) + \epsilon^2 a_2 \right. \\
& \left. - \frac{\epsilon^2}{2} b_1^2 + \frac{\epsilon^2}{8}(\tau - t_0)^2 - \frac{\epsilon^2}{2} a_1(\tau - t_0) + O(\epsilon^3) \right] \\
& + A(\tau) \cos(t + \theta(\tau)) \left[ \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \epsilon^2 a_1 b_1 \right. \\
& \left. - \frac{\epsilon^2}{2}(\tau - t_0) b_1 - \frac{\epsilon^2}{8}(\tau - t_0) + O(\epsilon^3) \right] \\
& - \frac{\epsilon}{2}(t - \tau) A(\tau) \left[ \sin(t + \theta(\tau)) + \epsilon b_1 \cos(t + \theta(\tau)) \right. \\
& \left. + \epsilon a_1 \sin(t + \theta(\tau)) + O(\epsilon^2) \right] \\
& + \frac{\epsilon^2}{8} A(\tau) \left[ [(t - \tau)^2 + 2(t - \tau)(\tau - t_0)] \sin(t + \theta(\tau)) \right. \\
& \left. - (t - \tau) \cos(t + \theta(\tau)) + O(\epsilon) \right]
\end{aligned}$$

**Notar que las funciones  $a$ 's y  $b$ 's son arbitrarias. Las fijamos pidiendo que los términos no seculares (sin potencias de  $t$ ) no tengan dependencia en  $t_0$  orden a orden en  $\epsilon$ . Así obtenemos:**

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}(\tau - t_0) \\
a_2 &= \frac{1}{8}(\tau - t_0)^2 \\
b_1 &= 0 \\
b_2 &= \frac{1}{8}(\tau - t_0)^2
\end{aligned}$$



Así obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= A(\tau) \sin(t + \theta(\tau)) - \frac{\epsilon}{2}(t - \tau)A(\tau) \sin(t + \theta(\tau)) \\
&+ \frac{\epsilon^2}{8}A(\tau)(t - \tau)^2 \sin(t + \theta(\tau)) - \frac{\epsilon^2}{8}A(\tau)(t - \tau) \cos(t + \theta(\tau)) \\
&+ O(\epsilon^3)
\end{aligned}$$

La relación entre las constantes de integración originales y las nuevas viene dadas por:

$$\begin{aligned}
A_0 &= A(\tau) \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2}(\tau - t_0) + \frac{\epsilon^2}{8}(\tau - t_0)^2 + O(\epsilon^3) \right] \\
\theta_0 &= \theta(\tau) + \frac{\epsilon^2}{8}(\tau - t_0) + O(\epsilon^3)
\end{aligned}$$

2. En general, para conocer las funciones  $A(\tau)$  y  $\theta(\tau)$  deberíamos resumir las anteriores series lo que, en general, es imposible. La alternativa del método CGO es utilizar la propiedad:

$$\frac{dx(t; \tau)}{d\tau} = 0 \tag{16}$$

que, como vimos, es equivalente a pedir que las funciones  $A(\tau)$  y  $\theta(\tau)$  generan la misma familia de soluciones:

$$x(t; \tau, A(\tau), \theta(\tau)) = x(t; \tau', A(\tau'), \theta(\tau')) \tag{17}$$

y  $x(\tau; \tau, A(\tau), \theta(\tau))$  es solución de la ecuación diferencial original. En nuestro caso de la primera condición

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dA(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\epsilon}{2}A(\tau) + O(\epsilon^2) \\ \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\epsilon^2}{8} + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \tilde{A}e^{-\epsilon\tau/2} \\ \theta(\tau) &= \tilde{\theta} - \frac{\epsilon^2}{8}\tau\end{aligned}$$

Así, la solución tiene la forma:

$$x(\tau) = \tilde{A}e^{-\epsilon\tau/2} \sin\left(\tau\left(1 - \frac{\epsilon^2}{8}\right) + \tilde{\theta}\right) \quad (18)$$

que es uniformemente exacta hasta orden  $\epsilon^3$  **para todo**  $\tau$ .

● **Ejercicios:**

- Encontrar el comportamiento asintótico de la ecuación de Rayleigh:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon \left[ \frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right] \quad (19)$$

- Encontrar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Schrödinger cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\epsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = Q(x)u(x) \quad (20)$$

### 3. Ley de los grandes números y Teorema del límite central

- Recordatorio:

- **Ley de los grandes números (Khinchine, 1929):** Sea  $\{x_k\}_{k=1}^N$  una secuencia de variables aleatorias mutuamente independientes con una distribución de probabilidad común,  $p(x)$ . Si el valor medio de la distribución existe, esto es,  $\langle x \rangle < \infty$  donde

$$\langle x \rangle \equiv \int_{\mathcal{R}} dx_k p(x_k) x_k \quad (21)$$

entonces, cuando  $N \rightarrow \infty$  para cada  $\epsilon > 0$  se cumple:

$$Prob \left( \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} - \langle x \rangle \right| > \epsilon \right) \rightarrow 0 \quad (22)$$

- **Teorema del Límite Central (Lindeberg, 1922):** Sea  $\{x_k\}_{k=1}^N$  una secuencia de variables aleatorias mutuamente independientes con una distribución de probabilidad común,  $p(x)$ . Si  $\langle x \rangle < \infty$  y  $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle < \infty$ , entonces cuando  $N \rightarrow \infty$  para cada  $\epsilon > 0$  se cumple:

$$Prob \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}\sigma} < \epsilon \right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (23)$$

- Vamos a realizar una demostración de ambos teoremas. Sea un camino aleatorio en  $\mathcal{R}^d$  donde la probabilidad de ir de  $\underline{r}$  a  $\underline{r}'$  es invariante traslacional:

$$p(\underline{r} \rightarrow \underline{r}') = p(\underline{r}' - \underline{r}) \quad (24)$$

- Si comenzamos desde  $\underline{r}_0$ , nos preguntamos por la probabilidad de que en  $N$  pasos el caminante se encuentre en  $\underline{r}$ :

$$\begin{aligned} P_N(\underline{r}_0 \rightarrow \underline{r}) &= \int_{\mathcal{R}^d} d\underline{r}_1 \dots d\underline{r}_{N-1} p(\underline{r}_0 \rightarrow \underline{r}_1) \dots p(\underline{r}_{N-1} \rightarrow \underline{r}) \\ &= \int_{\mathcal{R}^d} d\underline{u}_1 \dots d\underline{u}_N p(\underline{u}_1) \dots p(\underline{u}_N) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0 - \sum_{i=1}^N \underline{u}_i) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las expresiones:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \sum_{i=1}^N \underline{u}_i \quad , \quad \underline{u}_i = \underline{r}_i - \underline{r}_{i-1} \quad (25)$$

Esta última expresión se puede escribir como:

$$P_N(\underline{r}_0 \rightarrow \underline{r}) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}_0)} \langle e^{-i\underline{k}\underline{u}} \rangle^N \quad (26)$$

- **Desarrollo en cumulantes de una distribución:** Dada una distribución  $f(\underline{r})$  siempre podemos escribirla como:

$$f(\underline{r}) = \int_{\mathcal{R}^d} d\underline{u} f(\underline{u}) \delta(\underline{u} - \underline{r}) \quad (27)$$

si utilizamos la representación integral de la delta tenemos:

$$f(\underline{r}) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \int_{\mathcal{R}^d} d\underline{u} f(\underline{u}) e^{-i\underline{k}\cdot\underline{u}} \equiv \int_{\mathcal{R}^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \langle e^{-i\underline{k}\cdot\underline{u}} \rangle \quad (28)$$

Podemos desarrollar formalmente la exponencial en potencias de  $\underline{k}$ , realizar los promedios y reexpresar el resul-

tado de forma exponencial asi:

$$f(\underline{r}) = \int_{\mathcal{R}^d} \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^d} \exp \left[ i\underline{k} \cdot (\underline{r} - \langle \underline{u} \rangle) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \sigma_{\alpha\beta}^2 + \dots \right] \quad (29)$$

donde  $\sigma_{\alpha\beta} = \langle (u_\alpha - \langle u_\alpha \rangle)(u_\beta - \langle u_\beta \rangle) \rangle$  esto es, conocer una distribución es equivalente a conocer **TODOS** sus momentos pues a partir de ellos podemos reconstruirla. Asi podemos parametrizar las distribuciones por sus momentos y una distribución  $f$  en concreto es isomorfa a un vector infinitodimensional  $(\underline{r}, m_1, m_2, \dots)$ , donde  $m_j$  es el momento  $j$  de la distribución. (**Ejercicio: Demostar la anterior expresión**)

- De esta forma, si

$$p(\underline{r}) \Leftrightarrow (\underline{r}, m_1, m_2, \dots) \quad (30)$$

entonces

$$P_N(\underline{r}_0 \rightarrow \underline{r}) \Leftrightarrow (\underline{r} - \underline{r}_0, Nm_1, Nm_2, \dots) \equiv P_N(\underline{r} - \underline{r}_0) \quad (31)$$

- Se puede ver fácilmente que

$$N^d P_N(N\underline{r}') \Leftrightarrow (\underline{r}', m_1, \frac{m_2}{N}, \frac{m_3}{N^2}, \dots, \frac{m_j}{N^{j-1}}, \dots) \quad (32)$$

Observamos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^d P_N(N\underline{r}') \Leftrightarrow (\underline{r}', m_1, 0, 0, \dots) \Leftrightarrow \delta(\underline{r}' - \langle \underline{u} \rangle) \quad (33)$$

esto es,

$$\underline{r}' \rightarrow \langle \underline{u} \rangle \quad N \rightarrow \infty \quad (34)$$

Si tomamos  $\underline{r}' = (\underline{r} - \underline{r}_0)/N$  y utilizando las definiciones de  $u$  obtenemos

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{u}_i \rightarrow \int_{\mathcal{R}^d} d\underline{u} p(\underline{u}) \underline{u} \quad (35)$$

que no es más que la **Ley de los Grandes números**.

- De la expresión de  $P_N$  observamos también que la primera corrección a  $N$  estrictamente infinita resulta una distribución gaussiana, esto es:

$$N^d P_N(N\underline{r}') \Leftrightarrow (\underline{r}', m_1, \frac{m_2}{N}, 0, 0, \dots, 0)[1 + O(N^{-1})] \quad (36)$$

Esto es, la probabilidad de encontrar un valor  $\underline{S}_N = \frac{1}{N} \sum_i \underline{u}_i$  tiene como límite una delta de Dirac siguiendo una familia de distribuciones gaussianas de media y desviaciones típicas:

$$\langle S_N \rangle = m_1 \quad , \quad \langle (S_N - \langle S_N \rangle)^2 \rangle = \frac{m_2}{N} \quad (37)$$

que no es más que el **Teorema del límite central**

#### 4. Conocer sin resolver: integrales desconocidas

- ¿Cual es la solución de la integral indefinida:

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\{-a\phi^2 - b\phi^4\} \quad (38)$$

donde  $b > 0$ ?

- Para saber su valor podemos usar la fórmula 3.462 de las

tablas de Gradshteyn y Ryzhik:

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} \exp\{-\beta x^2 - \gamma x\}$$

$$= (2\beta)^{-\nu/2} \Gamma(\nu) e^{\gamma^2/8\beta} D_{-\nu}(\gamma/\sqrt{2\beta}) \quad \beta, \nu > 0$$

donde identificando:  $x = \phi^2$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $\beta = b$  and  $\gamma = a$ , encontramos

$$I(a, b) = \sqrt{\pi}(2b)^{-1/4} e^{a^2/8b} D_{-1/2}(a/\sqrt{2b}) \quad (39)$$

donde  $D_n(z)$  son las funciones cilindrico-parabólicas (ver Gradshteyn et al.: 9.24 y 9.25; Abramowitz: 19.1). En particular sabemos su comportamiento cuando el argumento tiende a cero o infinito:

$$D_{-1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{2^{3/4}} \Gamma(1/4) y_1(z) - \frac{1}{2^{1/4}} \Gamma(3/4) y_2(z) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{z}{2} \right)^{1/2} K_{1/4} \left( \frac{z^2}{4} \right)$$

donde

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$$

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

donde los coeficientes  $a_n$  se generan a partir de la relación de recursión:  $a_{n+4} = (n+1)(n+2)a_n/4$  con las condiciones iniciales:  $a_0 = a_1 = 1$ .

Cuando  $z \rightarrow \infty$ :

$$D_{-1/2}(z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{z}} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{1}{z^2} + \frac{105}{128} \frac{1}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right) \right] \quad (40)$$

Así la integral que buscamos tiene el comportamiento (cuando  $a > 0$ ):

$$I(0, b) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{b^{1/4}}$$

$$I(a, b) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{3b}{4a^2} + \frac{105b^2}{32a^4} + O(b^3)\right]$$

- **NOTAR:** La solución es incompleta, no sabemos lo que ocurre cuando  $a < 0$ .
- ¿Que hacer en casos más generales?
- ¿Teoría de perturbaciones:?

Supongamos que no conocemos la semi-solución dada por las tablas. La primera estrategia natural (suponiendo  $a > 0$ ) para obtener alguna información de la integral es suponer  $b \simeq 0$  y desarrollar el argumento de la exponencial:

$$I(a, b) = \int_R d\phi e^{-a\phi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!} \phi^{4n} \quad (41)$$

Estamos tentados de intercambiar sumas por integrales **¿Es correcto?** Para ver si en nuestro caso eso se puede hacer aplicamos el siguiente teorema:

**Teorema (E.H. Moore):** Si  $f(x, y) \rightarrow h(x)$  cuando  $y \rightarrow \infty$  y  $f(x, y) \rightarrow g(y)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , y ambos límites se alcanzan uniformemente, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \quad (42)$$



Definimos:

$$f(m, x) = \sum_{l=1}^m \int_0^x dx' u_l(x') = \int_0^x dx' \sum_{l=1}^m u_l(x') \quad (43)$$

Podemos aplicar el anterior teorema (y, por lo tanto, podemos intercambiar la integral por la suma) siempre que:

1.  $f(m, x)$  existe  $\forall m, x$  y existen los límites  $m \rightarrow \infty$  con  $x$  fija y  $x \rightarrow \infty$  con  $m$  fija.
2. La convergencia a los límites es uniforme, esto es:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists n \mid \forall m > n \mid f(m, x) - f(\infty, x) < \epsilon \forall x \\ \forall \epsilon > 0 \exists y \mid \forall x > y \mid f(m, x) - f(m, \infty) < \epsilon \forall m \end{aligned}$$

De esta forma la primera condición se satisface trivialmente. Sin embargo, la segunda condición **NO SE CUMPLE**:

$$\exists n \mid \forall m > n \left| \int_0^\phi d\phi' e^{-a\phi'^2} \left[ \sum_{n=0}^m (-b)^n \phi'^{4n} / n! - \exp(-b\phi'^4) \right] \right| < \epsilon \forall \phi$$

pues **ninguna serie de potencias finita puede tender asintóticamente a una exponencial para cualquier valor de  $\phi$ .**

En conclusión: **NO PODEMOS PERMUTAR LA INTEGRAL POR LA SUMA.**

- **Series asintóticas:**

Si permutamos suma por integral la serie resultante no es convergente, esto es:

$$I(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-b}{a} \right)^n \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{\Gamma(n + 1)} \quad (44)$$

y si aplicamos el criterio de **Cauchy** de convergencia de series vemos que:  $|a_n/a_{n-1}| \simeq 4bn/a^2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego la serie **NO CONVERGENTE EN MODULO**.

Observamos que los signos de los términos de la serie se alternan y quizás hay cierta compensación si sumamos los términos de dos en dos. En particular se puede demostrar que

$$I_{2m}(a, b) - I_{2m+2}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{b}{a^2} \right)^{2m+1} \frac{\Gamma(4m + 5/2)}{\Gamma(2m + 2)} \left[ 1 - \frac{b(4m + 5/2)(4m + 7/2)}{a^2(2m + 2)} \right]$$

Observamos que la serie **parece** que converge desde  $m = 0$  hasta  $m = m_0$ , donde  $m_0$  es el entero que minimiza el último paréntesis:

$$1 - b(4m_0 + 5/2)(4m_0 + 7/2)/((2m_0 + 2)a^2) \simeq 0 \quad (45)$$

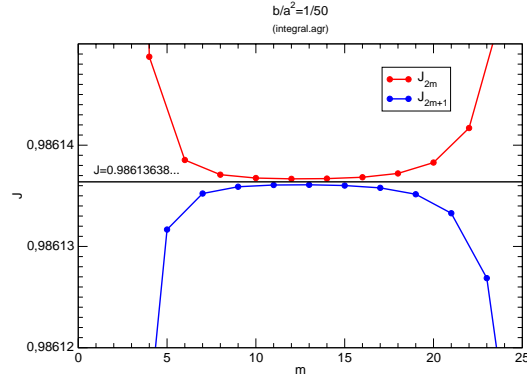
y, si  $b/a^2$  es muy pequeño, entonces  $m_0 \simeq a^2/8b$ .

De hecho se puede demostrar (**EJERCICIO**):

$$\dots > I_{2m} > \dots > I_{2m_0} > I > I_{2m_0+1} > I_{2m_0+3} > \dots > I_{2m+1} > \dots$$

cuando  $m < m_0$ . Esto es,  $I_{2m_0}$  e  $I_{2m_0+1}$  hacen de cota inferior y superior del resultado exacto. Luego si intercambiamos sumas por integrales podemos extraer información interesante **HASTA CIERTA PRECISION** dada por:

$$\begin{aligned} \Delta(m_0) &\equiv I_{2m_0}(a, b) - I_{2m_0+1}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{b}{a^2} \right)^{2m_0+1} \frac{\Gamma(4m_0 + 5/2)}{\Gamma(2m_0 + 2)} \\ &\simeq \frac{1}{8m_0\sqrt{2a}} e^{-2m_0} \quad m_0 \rightarrow \infty \end{aligned}$$



En la práctica:

- Si queremos precisión, esto es,  $\Delta$  muy pequeña, necesitaremos  $m_0$  grandes y, por lo tanto, **SOLO PODREMOS ESTUDIAR INTEGRALES CON  $b/a^2$  muy pequeños.**
- Si queremos estudiar zonas con valores de  $b/a^2$  intermedios, no tiene sentido utilizar muchos términos perturbativos pues la precisión del cálculo será pequeña.

● **UNA NUEVA ESTRATEGIA:**

Hemos visto las limitaciones de aplicar de forma directa métodos perturbativos que, en cualquier caso, no se pueden aplicar cuando  $a < 0$  y/o dan resultados poco interesantes si  $b/a^2$  no es muy pequeño. Hemos de cambiar la estrategia.

Supongamos que existe una transformación  $T$  tal que:

$$TI(a, b) = C(a', b')I(a', b') = I(a, b) \quad (46)$$

donde  $C(a, b)$  es una constante y  $a' = a'(a, b)$ ,  $b' = b'(a, b)$ . Esta transformación no resuelve la integral pero si **cambia el valor de los parámetros de la integral**. De hecho, la transformación y su aplicación reiterada define un flujo en el espacio de parámetros:

$$(a, b) \rightarrow (a^{(1)}, b^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (a^{(n)}, b^{(n)}) \quad (47)$$

Nos gustaría que ese flujo convergiese a un **punto fijo** de forma que el valor de la integral sería

$$I(a, b) = I(a^*, b^*) \prod_{n=0}^{\infty} C(a^{(n)}, b^{(n)}) \quad (48)$$

- ¿Existe una transformación  $T$  que tenga un punto fijo (o varios)  $(a^*, b^*)$ ?
- Para que sea útil: ¿El punto fijo es sencillo i.e.  $(a^*, 0)$ ?

Este esquema, sugerido por Kadanoff en el contexto del modelo de Ising, no es en la práctica realizable porque no sabemos construir una transformación  $T$  que tenga esas propiedades.

Si ampliamos **el espacio de parámetros de la integral** sí que podemos construir una  $T$ . En concreto, definimos:

$$e^{-H(\phi'; \underline{g}')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi T(\phi' | \phi) e^{-H(\phi; \underline{g})} \quad (49)$$

donde

$$H(\phi; \underline{g}) = g_0 + g_1 \phi^2 + g_2 \phi^4 + \dots + g_n \phi^{2n} + \dots \quad (50)$$

y  $\underline{g} \equiv (g_0, g_1, g_2, \dots)$ . Observamos que si queremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi' e^{-H(\phi'; \underline{g}')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-H(\phi; \underline{g})} \quad (51)$$

es suficiente que se cumpla

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi' T(\phi'|\phi) = 1 \quad (52)$$

Con este esquema conseguimos contruir una recurrencia que **conserva el valor de la integral en un espacio de parámetros infinito**. En nuestro caso:

$$(0, a, b, 0, \dots) \rightarrow \underline{a}^{(1)} = (g_0^{(1)}, g_1^{(1)}, \dots) \rightarrow \dots \underline{g}^{(n)} \dots \quad (53)$$

En particular, elegimos:

$$T(\phi'|\phi) = \frac{1}{2} \left[ \delta\left(\phi' - \frac{Z_0}{Z_1} - \frac{\phi}{Z_1}\right) + \delta\left(\phi' + \frac{Z_0}{Z_1} + \frac{\phi}{Z_1}\right) \right] \quad (54)$$

Si sustituimos, obtenemos

$$H(\phi'; \underline{g}') = \log 2 - \log Z_1 - \log \left[ e^{-H(Z_1\phi' - Z_2; \underline{g}')} + e^{-H(Z_1\phi' + Z_2; \underline{g}')} \right]$$

y desarrollando e identificando potencias de  $\phi'$  obtenemos la recurrencia entre  $g'_n$  y  $g_n$ 's.

Es más interesante construir una transformación infinitesimal y estudiar su límite continuo. Supongamos que los coeficientes de  $H$  están parametrizados por  $\lambda$ , i.e.  $g_n = g_n(\lambda)$ . Elegimos:

$$Z_1 = 1 + \Delta\lambda A \quad Z_2 = (\Delta\lambda)^{1/2} \quad (55)$$

Notemos que  $\Delta\lambda = 0$  implica que la transformación  $T$  es la identidad. Si desarrollamos la recurrencia para  $\Delta\lambda \simeq 0$ ,

tenemos:

$$\begin{aligned}
 H(\phi; \underline{g}(\lambda + \Delta\lambda)) &= H(\phi; \underline{g}(\lambda)) \\
 + \Delta\lambda &\left[ A [\phi H'(\phi; \underline{g}(\lambda)) - 1] + \frac{1}{2} [H''(\phi; \underline{g}(\lambda)) - H'(\phi; \underline{g}(\lambda))^2] \right] \\
 + O(\Delta\lambda^2)
 \end{aligned}$$

Si sustituimos  $H(\phi; \underline{g})$  en ambos lados de la anterior ecuación y comparamos orden a orden los coeficientes que acompañan las potencias de  $\phi^{2n}$  obtenemos las **ecuaciones de recursión**:

$$\begin{aligned}
 g_0(\lambda + \Delta\lambda) &= g_0(\lambda) + \Delta\lambda [g_1(\lambda) - A] \\
 g_1(\lambda + \Delta\lambda) &= g_1(\lambda) + \Delta\lambda [2g_1(\lambda)(A - g_1(\lambda)) + 6g_2(\lambda)] \\
 g_2(\lambda + \Delta\lambda) &= g_2(\lambda) + \Delta\lambda [4g_2(\lambda)(A - 2g_1(\lambda)) + 15g_3(\lambda)] \\
 g_3(\lambda + \Delta\lambda) &= g_3(\lambda) + \Delta\lambda [-8g_2(\lambda)^2 + 6g_3(\lambda)(A - 2g_1(\lambda)) + 28g_4(\lambda)] \\
 g_4(\lambda + \Delta\lambda) &= \dots
 \end{aligned}$$

Observar que la recurrencia no es cerrada y se extiende sobre **los infinitos coeficientes** de  $H$ .

En el límite de  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  convertimos la anterior recurrencia en las **ecuaciones de evolución**:

$$\begin{aligned}
 \frac{dg_0}{d\lambda} &= g_1 - A \\
 \frac{dg_1}{d\lambda} &= 2g_1(A - g_1) + 6g_2 \\
 \frac{dg_2}{d\lambda} &= 4g_2(A - 2g_1) + 15g_3 \\
 \frac{dg_3}{d\lambda} &= -8g_2^2 + 6g_3(A - 2g_1) + 28g_4 \\
 \frac{dg_4}{d\lambda} &= \dots
 \end{aligned}$$

en nuestro caso la condición inicial para resolver estas ecuaciones es:

$$\underline{g} = (0, a, b, 0, \dots, 0, \dots) \quad (56)$$

La ecuación de evolución para  $g_0$  se puede resolver directamente en función de  $g_1$ :

$$g_0(\lambda) = \int_0^\lambda d\alpha [g_1(\alpha) - A] \quad (57)$$

Para conocer  $g_1$  debemos de resolver el resto de las ecuaciones diferenciales acopladas. Para ello truncamos el conjunto de ecuaciones hasta cierto orden. Por ejemplo suponemos que  $g_n = 0 \quad \forall \quad n > 3$ . Este tipo de aproximación aparentemente crudo recobra su sentido cuando suponemos que  $b \simeq 0$ . En ese caso  $g_3$  es de orden  $b^2$  en todo momento de la evolución,  $g_4$  es de orden  $b^3, \dots$ . De esta forma, despreciar  $g_4$  y coeficientes superiores no es más que estudiar con precisión el comportamiento del sistema hasta cierto orden de la teoría de perturbaciones con respecto al parámetro  $b$ . Obviamente esto es correcto siempre que el propio coeficiente no crezca indefinidamente durante la recurrencia.

## Truncación de segundo orden:

Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\lambda} &= 2g_1(A - g_1) + 6g_2 \\ \frac{dg_2}{d\lambda} &= 4g_2(A - 2g_1) \end{aligned}$$

con la condición inicial:  $(g_1(0), g_2(0)) = (a, b)$ .

Lo primero que nos preguntamos es si la recurrencia tiene algún punto fijo y si éste es de naturaleza estable o no. Los puntos fijos son solución de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}0 &= 2g_1^*(A - g_1^*) + 6g_2^* \\0 &= 4g_2^*(A - 2g_1^*)\end{aligned}$$

y son:

$$\begin{aligned}(g_1^*, g_2^*) &= (0, 0) \quad (I) \\&= (A, 0) \quad (II) \\&= \left(\frac{A}{2}, -\frac{A^2}{12}\right) \quad (III)\end{aligned}$$

Observar que el valor concreto de  $A$  no es importante (salvo que  $A = 0$ ) pues la estructura de puntos fijos siempre es la misma.

Podemos estudiar la estabilidad local de los puntos fijos. Para ello linealizamos las ecuaciones de evolución alrededor de un punto fijo:

$$g_1(\lambda) = g_1^* + v_1(\lambda) \quad g_2(\lambda) = g_2^* + v_2(\lambda) \quad (58)$$

despreciando los términos de orden  $v^2$  o superiores. Esto es, las ecuaciones de evolución para  $v_1$  y  $v_2$  son:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_1}{d\lambda} \\ \frac{dv_2}{d\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A - 4g_1^* & 6 \\ -8g_2^* & 4A - 8g_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Podemos analizar el comportamiento de los puntos fijos:



- **(I)  $\underline{g} = (0, 0)$ :** Los valores y vectores propios son:

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= 2A & \underline{v}^{(1)} &= (1, 0) \\ \xi^{(2)} &= 4A & \underline{v}^{(2)} &= (3, A)\end{aligned}$$

por lo que el punto fijo es **inestable**.

- **(II)  $\underline{g} = (A, 0)$ :** Los valores y vectores propios son:

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= -2A & \underline{v}^{(1)} &= (1, 0) \\ \xi^{(2)} &= -4A & \underline{v}^{(2)} &= (3, -A)\end{aligned}$$

por lo que el punto fijo es **estable**.

- **(III)  $\underline{g} = (A/2, -A^2/12)$ :** Los valores y vectores propios son:

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= 2A & \underline{v}^{(1)} &= (3, A) \\ \xi^{(2)} &= -2A & \underline{v}^{(2)} &= (3, -A)\end{aligned}$$

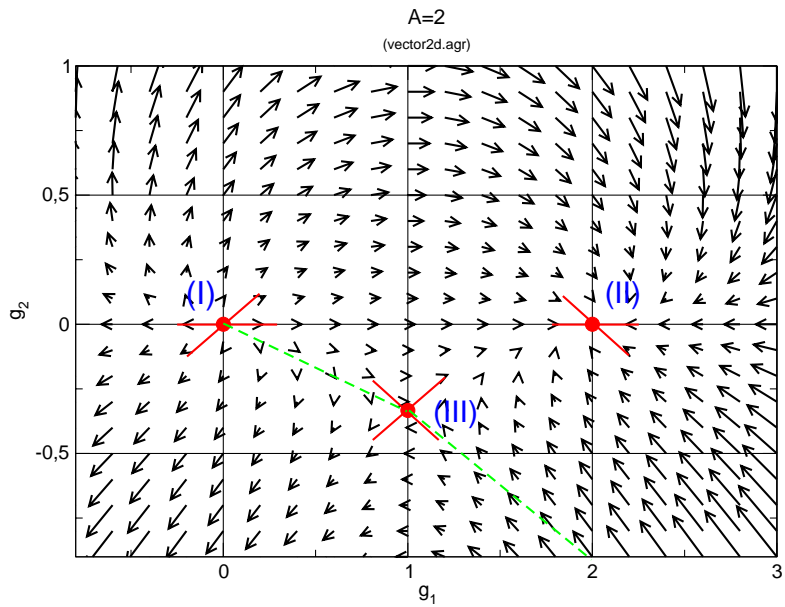
por lo que el punto fijo es **punto de silla**.

El diagrama de flujo de las ecuaciones es:

Observar:

- (a) Existen tres puntos fijos y solo uno de ellos es estable (el  $(II)$ ).
- (b) Para cualquier valor inicial con  $g_2 > 0$  la transformación lleva al punto fijo  $(II)$ .
- (c) Hay valores con  $g_2 < 0$  que **también llevan al sistema al punto fijo  $(II)$** .

Probablemente el quedarse con las ecuaciones hasta orden  $g_2$  es la razón de este comportamiento. Además, es



conveniente conocer si la existencia y características de los puntos fijos permanecen si truncamos las ecuaciones de evolución en un orden superior.

## Truncación de tercer orden:

Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}\frac{dg_0}{d\lambda} &= g_1 - A \\ \frac{dg_1}{d\lambda} &= 2g_1(A - g_1) + 6g_2 \\ \frac{dg_2}{d\lambda} &= 4g_2(A - 2g_1) + 15g_3 \\ \frac{dg_3}{d\lambda} &= -8g_2^2 + 6g_3(A - 2g_1)\end{aligned}$$

Los puntos fijos, y sus valores y vectores propios correspondientes son:

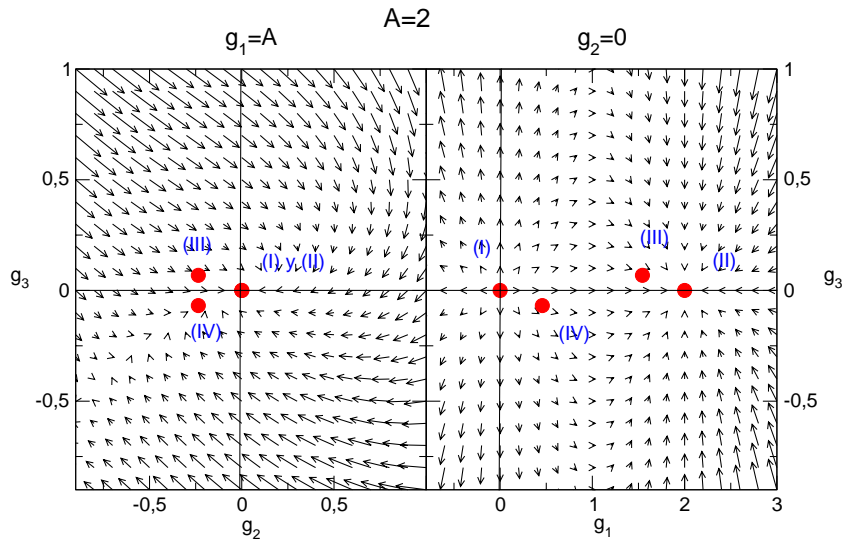
- (I)  $\underline{g}^* \equiv (g_1, g_2, g_3) = (0, 0, 0)$
- (II)  $\underline{g}^* = (A, 0, 0)$
- (III)  $\underline{g}^* = \left(\frac{A}{2}(1 + C), -\frac{A^2}{17}, \frac{4C}{255}A^3\right)$
- (IV)  $\underline{g}^* = \left(\frac{A}{2}(1 - C), -\frac{A^2}{17}, -\frac{4C}{255}A^3\right)$

donde  $C = \sqrt{1 - \frac{12}{17}}$ .

Se puede demostrar que el punto fijo (II) **es el único localmente estable**. Observar que el punto fijo (II) en la truncación de segundo orden se ha dividido en dos en este nivel de truncación, el (III) y el (IV).

Observar que el flujo en el plano  $g_3 = 0$  es el mismo que la truncación de segundo orden.

**Estudiar la estructura de puntos fijos para la truncación de cuarto orden**



Algunas propiedades:

- El valor de la integral original viene dado, en función del punto fijo estable:

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-a\phi^2 - b\phi^4} = e^{-g_0(\infty; A)} I(A, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-g_0(\infty; A)}$$

- Notar que **el resultado NO DEPENDE del valor de A elegido**. ¿La truncación afecta de alguna forma en este sentido? Pues si

$A$	$a$	$b$	$I(a, b)$	$I^{(2)}$	$I^{(3)}$
1	1	0.01	1.7597	1.7594	1.76016
2				1.7594	1.75944
3				1.7594	1.75971

- La truncación también afecta al valor de la integral, a veces de forma dramática:

$A$	$a$	$b$	$I(a, b)$	$I^{(2)}$	$I^{(3)}$
2	0.7	1	1.47339	1.29679	$\infty$
2	1	1	1.36843	1.25331	1.59293
2	2	1	1.11956	1.08968	1.13729
2	3	1	0.961738	0.952313	0.965052

- Notar, que el efecto de la truncación es menor si el valor  $b$  es pequeño y, por lo tanto, es de carácter perturbativo:

$A$	$a$	$b$	$I(a, b)$	$I^{(2)}$	$I^{(3)}$
2	1	0.1	1.67409	1.65993	1.67872
2	2	0.1	1.23197	1.23086	1.2321
2	3	0.1	1.01497	1.01519	1.01518
2	1	0.01	1.7597	1.7594	1.75971
2	2	0.01	1.25099	1.25098	1.25099
2	3	0.01	1.02248	1.02248	1.02248
2	1	0.001	1.77113		
2	2	0.001	1.25308		
2	3	0.001	1.02324		