

Mecánica Estadística

Licenciatura de Física

Fenómenos Críticos

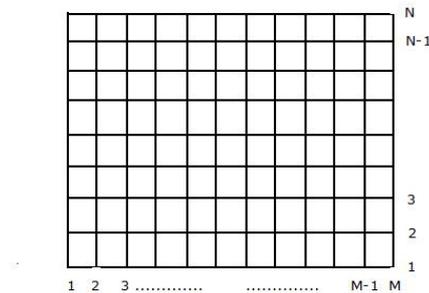
- Modelo de Ising en dos dimensiones. Función de Partición. Matriz de Transferencia
- Representación $SL(2, C)$
- Operadores creación y aniquilación
- Solución y límite termodinámico

1. Modelo de Ising en dos dimensiones. Función de Partición. Matriz de Transferencia

Bibliografía:

- T.D. Schultz, D.C. Mattis, E.H.Lieb, *Two dimensional Ising Model as a soluble problem of many fermions*, **Review of Modern Physics** **36**, 856-871 (1964).
- Colin J. Thompson, *Algebraic Derivation of the Partition Function of a two-dimensional Ising model*, **Journal of Mathematical Physics** **6**, 1392-1395 (1965).

Sea una red con N líneas y M columnas. En cada nudo de la red hay una variable de espín: $s_{n,m} = \pm 1$.



El Hamiltoniano de interacción es:

$$H(s) = -J \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M s_{n,m} [s_{n+1,m} + s_{n,m+1}] - h \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M s_{n,m} \quad (1)$$

donde vamos a utilizar condiciones de contorno periódicas:

$$s_{n,M+1} = s_{n,1} \quad s_{N+1,m} = s_{1,m} \quad (2)$$

Las propiedades termodinámicas del sistema quedan descritas por la función de partición:

$$Z = \sum_s \exp[-\beta H(s)] = \exp[-\beta NMF] \quad (3)$$

donde F es la energía libre de Helmholtz.

El objetivo de esta lección es realizar la suma anterior de forma algebraica.

El primer paso natural es reescribir la suma anterior como la traza de un producto de matrices. Esta estrategia es razonable pues una matriz no es más que la representación de un operador lineal y existen otras formas equivalentes de representarlos y operar con ellos (como así veremos).

Ejercicio 1: Demostrar que la función de partición Z puede expresarse:

$$Z = Tr \left[(V_3 V_2 V_1)^N \right] \quad (4)$$

donde las matrices V tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} (V_1)_{s_n, s_{n+1}} &= \prod_{m=1}^M \exp [K s_{n,m} s_{n+1,m}] \\ (V_2)_{s_n, s_{n+1}} &= \prod_{m=1}^M \exp [K s_{n,m} s_{n,m+1}] \delta(s_{n,m}, s_{n+1,m}) \\ (V_3)_{s_n, s_{n+1}} &= \prod_{m=1}^M \exp [\bar{h} s_{n,m}] \delta(s_{n,m}, s_{n+1,m}) \end{aligned}$$

donde $\bar{h} = \beta h$ y $K = \beta J$. Además $s_n \equiv (s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,M})$ y se puede interpretar como la codificación binaria de los índices de una matriz que tienen 2^M valores. Las V 's se denominan **matrices de transferencia**

2. Representación $SL(2, C)$

En notación de espacios de Hilbert podemos reescribir los elementos matriciales de las matrices V de la forma siguiente:

$$V_{s_n, s_{n+1}} = \langle s_n | V | s_{n+1} \rangle = \langle s_{n,1} s_{n,2} \dots s_{n,M} | V | s_{n+1,1} s_{n+1,2} \dots s_{n+1,M} \rangle$$

donde podemos ahora interpretar V como un operador actuando en un espacio de Hilbert de estados definidos por $|s_n\rangle$. Por otra parte, observamos que la estructura de los elementos matriciales de las matrices V es de la forma:

$$V_{s_n, s_{n+1}} = \prod_{m=1}^M v(s_{n,m}, s_{n+1,m}) \quad (5)$$

Es natural deducir que nuestro espacio de Hilbert lo podemos descomponer en suma directa de M subespacios de dimensión 2:

$$|s_{n,1} s_{n,2} \dots s_{n,M}\rangle = \bigotimes_{m=1}^M |s_{n,m}\rangle \quad (6)$$

y esperamos que

$$v(s_{n,m}, s_{n+1,m}) = \langle s_{n,m} | v_m | s_{n+1,m} \rangle \quad (7)$$

de forma que v_m es un operador que actúa en un espacio de Hilbert de dimensión 2 y con etiqueta m . Por ello es natural

pensar que v_m sea una combinación de Matrices de Pauli que, como sabemos, son una representación de $SL(2, C)$.

Recordemos que las matrices generadoras del espacio $SL(2, C)$ son la matrices de Pauli:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: Demostrar las siguientes propiedades de las matrices de Pauli:

$$\tau^\alpha \tau^\beta = i\tau^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{permutación cíclica de} \quad (123)$$

$$(\tau^\alpha)^2 = I$$

$$\tau^\alpha \tau^\beta + \tau^\beta \tau^\alpha = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

$$\exp(a\tau^\alpha) = I \cosh a + \tau^\alpha \sinh a$$

Ejercicio 3: Demostrar que las matrices de transferencia en función de las matrices de Pauli se pueden expresar como:

$$V_1 = (2 \sinh 2K)^{M/2} \exp \left(\bar{K} \sum_{m=1}^M \tau_m^1 \right)$$

$$V_2 = \exp \left(K \sum_{m=1}^M \tau_m^3 \tau_{m+1}^3 \right)$$

$$V_3 = \exp \left(\bar{h} \sum_{m=1}^M \tau_m^3 \right) \quad (8)$$

donde $\tanh \bar{K} = \exp(-2K)$ y el operador τ_m^α no es más que la matriz τ^α actuando en el subespacio m :

$$\tau_m^\alpha = I \otimes I \otimes I \otimes \dots \otimes \tau^\alpha \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (9)$$

Notar que se cumple la propiedad:

$$\tau_k^\alpha \tau_l^\beta = \tau_l^\beta \tau_k^\alpha \quad k \neq l \quad (10)$$

A partir de ahora podemos trabajar con operadores lineales y buscar transformaciones y espacios en los que poder realizar de forma explícita la potencia N 'esima de los operadores (matrices) de transferencia.

3. Operadores creación y aniquilación

A partir de ahora supondremos que el campo magnético $h = 0$. En otro caso las expresiones que obtendríamos para el operador V_3 en esta sección serían de tal complejidad que no nos permitirían avanzar en la resolución del problema.

Vamos a realizar varios cambios de operadores.

- **Operadores P y Q :**

Definimos:

$$\begin{aligned} P_k &= \tau_1^1 \tau_2^1 \dots \tau_{k-1}^1 \tau_k^3 \\ Q_k &= \tau_1^1 \tau_2^1 \dots \tau_{k-1}^1 \tau_k^2 \\ U &= \tau_1^1 \tau_2^1 \dots \tau_M^1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4: Demostrar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} P_k Q_k &= \tau_k^3 \tau_k^2 = -i \tau_k^1 \\ P_{k+1} Q_k &= i \tau_{k+1}^3 \tau_k^3 \quad k : 1, \dots, M-1 \\ \tau_1^3 \tau_M^3 &= i P_1 Q_M U \\ U^2 &= 1 \\ (i P_1 Q_M U)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 5: Demostrar que la matriz de transferencia $V = V_2 V_1$ se puede escribir como:

$$V = \frac{1}{2}(I + U)V_+ + \frac{1}{2}(I - U)V_- \quad (11)$$

donde

$$V_{\pm} = \exp \left[-iK \sum_{m=1}^M P_{m+1} Q_m \right] \exp \left[i\bar{K} \sum_{i=1}^M P_m Q_m \right] \quad (12)$$

con la convención: $P_{M+1} = \mp P_1$

- **Operadores creación y aniquilación a y a^\dagger : Definimos:**

$$\begin{aligned} Q_m &= a_m + a_m^\dagger \\ iP_m &= a_m - a_m^\dagger \end{aligned}$$

Ejercicio 6: Demostrar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} a_m a_{m'}^\dagger + a_{m'}^\dagger a_m &= \delta_{m,m'} \\ a_m a_{m'} + a_{m'} a_m &= 0 \end{aligned}$$

Notar que a_m y a_m^\dagger se comportan como operadores creación y aniquilación de fermiones.

Ejercicio 7: Demostrar que V_{\pm} y U se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \exp \left[K \sum_{m=1}^M (a_{m+1}^\dagger - a_{m+1})(a_m^\dagger + a_m) \right] \exp \left[-2\bar{K} \sum_{m=1}^M (a_m^\dagger a_m - \frac{1}{2}) \right] \\ U &= (-i)^M \exp \left[-i\pi \sum_{m=1}^M (a_m^\dagger a_m - \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Las condiciones de contorno de a 's heredadas de las de P 's son:

$$a_{M+1} = \mp a_1 \quad si V_{\pm} \quad (14)$$

Observar que el operador U es, esencialmente un operador de signo. Puesto que los operadores V_{\pm} son cuadráticos en a 's, estos siempre crearán y/o destruirán un número par de partículas no afectando al signo, esto es equivalente a demostrar que

$$[U, V_{\pm}] = 0 \quad (15)$$

De esta forma podemos calcular las potencias del operador V :

$$V^n = \frac{1}{2} (1 + U) V_+^n + \frac{1}{2} (1 - U) V_-^n \quad (16)$$

Ejercicio 8: Demostrar la anterior expresión por inducción

- Operadores invariantes por traslaciones η y η^\dagger :

Nuestro sistema es invariante por traslaciones debido a las condiciones de contorno periódicas. De igual forma lo son los operadores a_m aunque heredan propiedades de simetría o antisimetría dependiendo de si pertenecen a V_+ o V_- respectivamente. De esta forma es razonable definir los operadores η como la transformada de fourier de a :

$$a_m = \frac{1}{M^{1/2}} e^{i\pi/4} \sum_q e^{iqm} \eta_q \quad (17)$$

Las condiciones de contorno sobre los operadores a quedan ahora reflejadas en los valores de q 's permitidas. Esto es,

suponiendo M par:

$$q_+ = \pm(2j-1)\frac{\pi}{M}, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$q_- = \pm 2j\frac{\pi}{M}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

Ejercicio 9: Demostrar que V_{\pm} en función de η_q es:

$$V_{\pm} = [2 \sinh 2K]^{M/2} \prod_{0 \leq q_{\pm} \leq \pi} V_q \quad (18)$$

donde

$$V_q = \exp \left[2K \cos q (\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q}) + 2K \sin q (\eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger + \eta_q \eta_{-q}) \right]$$

$$\exp \left[-2\bar{K} (\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q} - 1) \right] \quad q \neq 0, \pi$$

$$V_0 = \exp \left[-2(\bar{K} - K) (\eta_0^\dagger \eta_0 - \frac{1}{2}) \right]$$

$$V_\pi = \exp \left[-2(\bar{K} + K) (\eta_\pi^\dagger \eta_\pi - \frac{1}{2}) \right]$$

Notar que se utiliza el hecho $\sum_{q_{\pm}} \cos q = 0$.

● **Operadores Σ :**

Definimos tres operadores:

$$\Sigma_q^1 = \eta_{-q} \eta_q + \eta_q^\dagger \eta_{-q}^\dagger$$

$$\Sigma_q^2 = i (\eta_{-q} \eta_q - \eta_q^\dagger \eta_{-q}^\dagger)$$

$$\Sigma_q^3 = \eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q} - 1 \quad q \neq 0, \pi$$

$$\Sigma_0^3 = 2\eta_0^\dagger \eta_0 - 1$$

$$\Sigma_\pi^3 = 2\eta_\pi^\dagger \eta_\pi - 1$$

Ejercicio 10: Demostrar las siguientes propiedades de los operadores Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma_q^\alpha \Sigma_{q'}^\beta - \Sigma_{q'}^\beta \Sigma_q^\alpha &= 2i\delta_{q,q'} \Sigma_q^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma) = P(1, 2, 3) \\ \Sigma_q^\alpha \Sigma_q^\beta + \Sigma_q^\beta \Sigma_q^\alpha &= 0 \quad \alpha \neq \beta \quad (q \neq 0, \pi)\end{aligned}$$

Ejercicio 11: Expresar V_q en función de los operadores Σ

Nuestro objetivo ahora es buscar una representación matricial de los operadores Σ para ello definimos los estados del espacio de Bloch de los operadores η :

$$\eta_q |q\rangle = 0 \quad \eta_q^\dagger |0\rangle = |q\rangle \quad (19)$$

De esta forma observamos que los operadores Σ_q actúan sobre un espacio de Bloch con dos partículas de momentos q y $-q$:

$$|q, -q\rangle \quad |q, 0\rangle \quad |0, -q\rangle \quad |0, 0\rangle \quad (20)$$

Ejercicio 11: Demostrar el comportamiento de los operadores Σ_q en el espacio de Bloch de dos partículas $|q, -q\rangle$:

$$\begin{aligned}(\Sigma_q^1, \Sigma_q^2, \Sigma_q^3) |q, -q\rangle &= (|0, 0\rangle, i|0, 0\rangle, |q, -q\rangle) \\ (\Sigma_q^1, \Sigma_q^2, \Sigma_q^3) |0, 0\rangle &= (|q, -q\rangle, -i|q, -q\rangle, -|0, 0\rangle) \\ (\Sigma_q^1, \Sigma_q^2, \Sigma_q^3) |q, 0\rangle &= 0 \\ (\Sigma_q^1, \Sigma_q^2, \Sigma_q^3) |0, -q\rangle &= 0\end{aligned}$$

Este comportamiento, expresado en representación matricial viene dado por:

$$\Sigma_q^\alpha = I^4 \otimes I^4 \otimes \dots \otimes \sigma^{\alpha r^+} \otimes I^4 \otimes \dots \otimes I^4 \quad (21)$$

donde la matriz $\sigma^\alpha r^+$ está en la posición j , con $q = (2j-1)\pi/M$ (estamos trabajando con la matriz V_+), I^4 es una matriz identidad de dimensión 4 y

$$\sigma^\alpha \begin{pmatrix} \tau^\alpha & 0^2 \\ 0^2 & \tau^\alpha \end{pmatrix}, \quad r^+ = \begin{pmatrix} I^2 & 0^2 \\ 0^2 & 0^2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

y donde podemos definir

$$\sigma_+^\alpha \equiv \sigma^\alpha r^+ = \begin{pmatrix} \tau^\alpha & 0^2 \\ 0^2 & 0^2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Ejercicio 12: Demostrar que V_+ en la representación de matrices de dimensión 4 se puede escribir como:

$$V_+ = [2 \sinh 2K]^{M/2} \bigotimes_{j=1}^{M/2} V_{2j-1} \quad (24)$$

donde

$$V_l = \exp \left[2K \left(\cos \frac{l\pi}{M} \sigma_+^3 - \sin \frac{l\pi}{M} \sigma_+^1 \right) \right] \exp [-2\bar{K} \sigma_+^3] \quad (25)$$

Ejercicio 13: Demostrar que V_l se puede escribir de la forma:

$$V_l = \exp \left[\sum_{\alpha=1}^3 c_l^\alpha \sigma_+^\alpha \right] \quad (26)$$

Hallar los valores explícitos de $c_l^\alpha \in R$.

Ahora es muy sencillo hallar las potencias de V_+ :

$$V_+^n = [2 \sinh 2K]^{nM/2} \bigotimes_{j=1}^{M/2} V_{2j-1}^n \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} V_l^n &= \exp \left[n \sum_{\alpha}^3 c_l^{\alpha} \sigma_+^{\alpha} \right] \\ &= r^- + r^+ \cosh(n\gamma_l) + \frac{\sinh(n\gamma_l)}{\gamma_l} \sum_{\alpha=1}^3 c_l^{\alpha} \sigma_+^{\alpha} \end{aligned}$$

donde $r^- = I^4 + r^+$ y $\cosh \gamma_l = \cosh(2K) \cosh(2\bar{K}) - \cos(l\pi/M)$

Al igual que el cálculo de V_+ podemos realizar el cálculo de V_- . Al igual que antes la representación natural es el uso de los operadores Σ_q^{α} con $q = 1, 2, \dots, M/2 - 1$. Además ahora definimos:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^3 &= I^4 \otimes I^4 \otimes \dots \otimes I^4 \otimes \sigma^3 \\ \Sigma_{\pi}^3 &= I^4 \otimes I^4 \otimes \dots \otimes I^4 \otimes (r^+ - r^-) \end{aligned}$$

notar que para la pareja $q = \pi$ y $q = 0$ utilizamos la base $|\pi, q = 0\rangle$, $|\pi, 0\rangle$, $|0, q = 0\rangle$ y $|0, 0\rangle$ donde diferenciamos entre estado vacío (0) y partícula con momento $q = 0$.

Asi

$$V_- = [2 \sinh 2K]^{Mn/2} \bigotimes_{j=1}^{M/2} V_{2j} \quad (28)$$

donde V_l tiene la misma expresión que la calculada para V_+ si $l \neq M$. Si $j = M/2$ tenemos:

$$V_M = \exp \left[-(\bar{K} - K)\sigma^3 - (\bar{K} + K)(r^+ - r^-) \right] \quad (29)$$

Asi las potencias de V_- son:

$$V_-^n = [2 \sinh 2K]^{Mn/2} \bigotimes_{j=1}^{M/2} V_{2j}^n \quad (30)$$

donde V_l^n para $l \neq M$ ya la calculamos antes y

$$V_M^n = \frac{1}{2} \left[r^-(e^{2nK} + e^{2n\bar{K}}) + r^+(e^{-2nK} + e^{-2n\bar{K}}) \right. \\ \left. \sigma_-^3(e^{2nK} - e^{2n\bar{K}}) + \sigma_+^3(e^{-2n\bar{K}} - e^{-2nK}) \right]$$

Por último el operador U lo podemos expresar en la representación q_+ o en la q_-

Ejercicio 14: Demostrar que el operador U en la representación q_+ y q_- es:

$$U_+ = \bigotimes_{j=1}^{M/2} (r^+ - r^-) \\ U_- = \bigotimes_{j=1}^{M/2-1} (r^+ - r^-) \bigotimes (\sigma_+^3 - \sigma_-^3)$$

Ejercicio 15: Obtener el valor de V^n

Sabiendo que $Tr(\bigotimes_{n=1}^N A_n) = \prod_{n=1}^N Tr(A_n)$,

Ejercicio 16: Demostrar que la función de partición $Z = Tr(V^N)$ que es igual a

$$Z = \frac{1}{2} [2 \sinh 2K]^{NM/2} \left[\prod_{j=1}^M \left[2 \cosh \frac{N\gamma_{2j-1}}{2} \right] + \prod_{j=1}^M \left[2 \sinh \frac{N\gamma_{2j-1}}{2} \right] \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^M \left[2 \cosh \frac{N\gamma_{2j}}{2} \right] - \prod_{j=1}^M \left[2 \sinh \frac{N\gamma_{2j}}{2} \right] \right]$$

Para realizar el límite termodinámico hemos de tener en cuenta el signo de $\gamma_0 \equiv \gamma_{2M}$ y utilizar la fórmula de Euler-McLaurin que sustituye la sumas sobre j por integrales.

Ejercicio 17: Demostrar que en el límite termodinámico se cumple:

$$-\beta F = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \frac{1}{NM} \ln Z = \frac{1}{2} \ln [2 \sinh 2K] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \gamma_q \quad (31)$$