Problemas de Física Estadística (3)

1. Sea un sistema con dos osciladores acoplados definido por su hamiltoniano de interacción

$$H(p_1, q_1, p_2, q_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(q_1 - q_2\right)^2$$

   - (a) Encontrar la evolución de la función densidad $\rho(p_1, q_1, p_2, q_2; t)$ para la condición inicial

$$\rho(p_1, q_1, p_2, q_2; 0) = Z^{-1} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}(p_1^2 + p_2^2)\right]$$

     utilizando la forma integrada del teorema de Liouville: $\rho(\alpha, 0) = \rho(U_t\alpha, t)$.

   - (b) Comprobar que la solución encontrada cumple la ecuación de Liuoville.

2. Deducir en la colectividad microcanónica que:

$$\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij} k_B T$$

   donde x_i puede ser q_i o p_i. Como consecuencia:

   - Calcular el valor medio de un hamiltoniano cuadrático en p's y q's.
   - Deducir :

$$\langle \sum_i q_i F_i \rangle = -3Nk_B T = -2K$$

     donde K es la energía cinética media y $F_i = \dot{p}_i$ es la fuerza aplicada sobre la partícula i.

   - Aplicar el anterior resultado al caso de una gas ideal encerrado en un recipiente de volumen V.

3. Sean dos gases ideales a la misma temperatura separados por una membrana rígida que permite el equilibrio térmico pero no el paso de moléculas. En un momento dado se separa la membrana para que se produzca la mezcla de los dos gases. Calcular la entropía del sistema antes y después de la mezcla y compararlas. ¿Qué conclusiones parecen seguirse?

4. Calcular la entropía de un conjunto de N partículas relativistas, encerradas en un volumen V con energía total E, cuyo Hamiltoniano es

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{N} c|p_i|$$

   Hallar la temperatura del sistema y su calor específico.