Problemas de Física Estadística (2)

1. Un recipiente que contiene un gas se puede representar de forma simple como un conjunto de M celdas en las que colocamos al azar N partículas de gas, pudiéndose colocar un número arbitrario de partículas en cada celda. Si dividimos imaginariamente en dos al recipiente una parte conteniendo M_1 y la otra $M_2 = M - M_1$ celdas, se pregunta:

   - Si $M_1 = M_2 = 2$ y $N = 2$. Calcular la probabilidad de observar cada una de las posibles configuraciones. ¿Cuales son las configuraciones más probables?
   - Para un M y N arbitrarios. ¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en la parte 1 del recipiente? ¿Cuál es la probabilidad de tener el mismo número de partículas en 1 y en 2?
   - Estudiar los casos anteriores en el límite $N \to \infty$.

2. Considérese la siguiente transformación A discreta en el tiempo $A : [0,1[\times [0,1[\to [0,1[\times [0,1[$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} x < \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} \\ & \\ x \geq \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} 2(x - \frac{1}{2}) \\ \frac{y+1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

   - Estudiar la transformación, *comentarla*.
   - Ver si la tranformación cumple el teorema de Liouville.
   - Tomar una fotografía, un dibujo o un esquema de puntos ordenado y aplicar la transformación. ¿Qué ocurre?

3. Considérese un sistema dinámico definido sobre el toro $\{(\phi_1, \phi_2) : \phi_i \in [0, 2\pi)\}$, que evoluciona discretamente en el tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots$ según las ecuaciones

$$\begin{aligned} \phi_1(t+1) &= \phi_1(t) + \phi_2(t) \\ \phi_2(t+1) &= \phi_1(t) + 2\phi_2(t) \end{aligned}$$

   - Comprobar que las ecuaciones definen una aplicación biyectiva sobre el toro y a partir de este resultado, demostrar que la densidad de probabilidad uniforme es invariante.
   - Estudiar numéricamente cómo evoluciona en el tiempo una pequeña superficie. ¿En qué dirección se expande y se contrae?

4. Hallar el valor de la integral:

$$\int_{R^n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} B_i x_i\right] \tag{1}$$