Problemas de Física Estadística (1)

1. El pendulo forzado con disipación (reloj de péndulo) tiene como ecuación del movimiento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2 \sin\phi - C\frac{d\phi}{dt} + A\cos\Omega t \tag{1}$$

Supogamos las condiciones iniciales $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dt}|_{t=0} = 0$ y los valores $\omega = 2.5$, $c = 0.5$ y $A = 3.8$.

- Estudiar numéricamente el comportamiento de $\phi(t)$ para tiempos $t \in [0, 200]$ y para varios valores de Ω comprendidos en el intervalo $[1, 3]$.
- ¿Es el movimiento periódico en algún caso? ¿como varia el periodo en función de Ω?
- Mostrar el diagrama de las fases $(\phi, d\phi/dt)$ para varios valores de Ω y condiciones iniciales.

2. Una partícula se mueve en el seno de un potencial unidimensional

$$V(x) = Ax^2 + Bx^4$$

con $A < 0$ y $B > 0$.

- Dibujar el potencial y las trayectorias correspondientes a diferentes valores de energía en el espacio de las fases (x, p).
- Discutir si existe algún punto de inestabilidad.
- ¿Hay cortes de trayectorias ? ¿Cómo es posible ?

3. Dos partículas se mueven sobre una circunferencia con velocidades constantes $\theta_i = w_i t$ donde θ designa el ángulo del vector de posición con respecto una dirección arbitraria. El estado instantáneo del sistema se puede describir por un punto en el interior de un cuadrado de lado 2π y ejes θ_1 y θ_2 ¿Qué condición debe de satisfacer la razón w_1/w_2 para que la trayectoria que recorre dicho punto llene densamente el interior del cuadrado?

4. Sean las ecuaciones de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

donde σ, r y $b > 0$. Demostrar que un volumen arbitrario en el espacio (x, y, z) evoluciona siguiendo la ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V dxdydz \nabla \vec{f}$$

donde $\vec{f} = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz)$. Hallar la solución y comentarla.(VOLUNTARIO: Dibujar el comportamiento de las ecuaciones para el caso $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$).