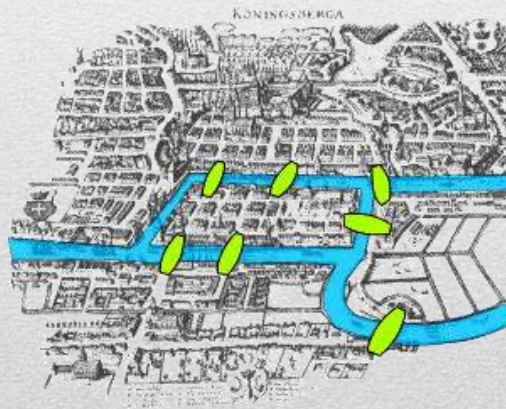


# Redes

## como objetos matemáticos

1st reference to a network, seems as pure mathematical object, perhaps in relation to civic debate in Russian city Kaliningrad in s. XVIII (then Königsberg, in Prussia): whether it was possible to cross all the 7 bridges only once in a single promenade.



Each node needs two edges (bridges) — in and out: Euler's “planar graph”, “walk”, “geometry of position”,... optimization problems

---

# Redes

## como objetos matemáticos

... but many natural & man made systems have net structure

They are interesting math. objects & studying networks is a useful way to understand many cooperative processes in nature; in fact, Interest in nets has seen spectacular growth in past 10 years, and we have learned

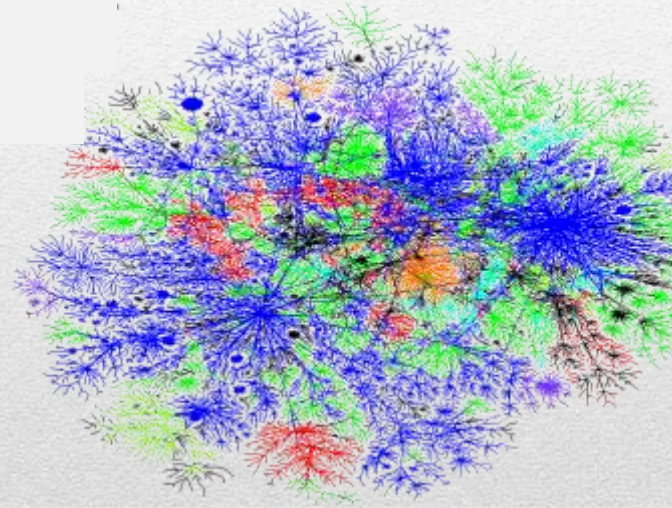
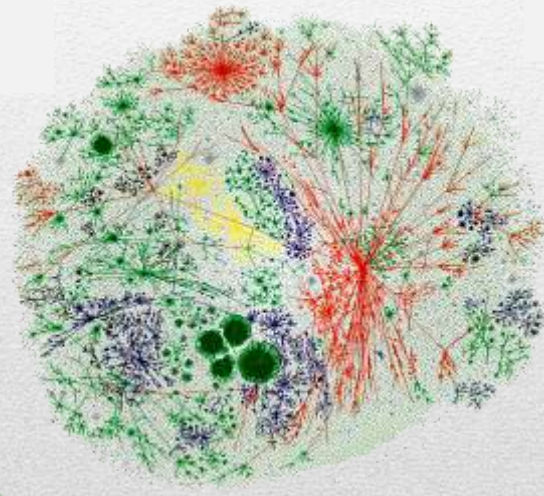
- + networks need indeed to be part of study of natural cooperation
- + statistical properties of networks — not just properties of individual nodes or groups of nodes
- + and that a network generally has a nontrivial structure  
i.e., the placement of edges linking nodes in the network is, in a sense, far from being random

This is evident in the Internet:



# Redes

como objetos matemáticos



This reveals that connections patterns are not regular nor completely random. Degree (# edges connected to node) distribution is important for functionality and other behaviors; e.g., speed at which diseases or information spread

---

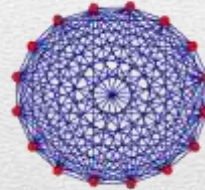


# Redes

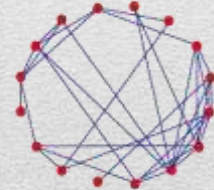
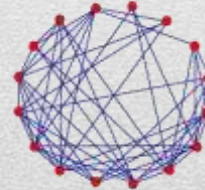
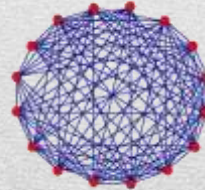
como objetos matemáticos

Wiring topology — networks may be:

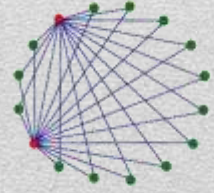
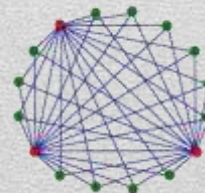
□ fully connected



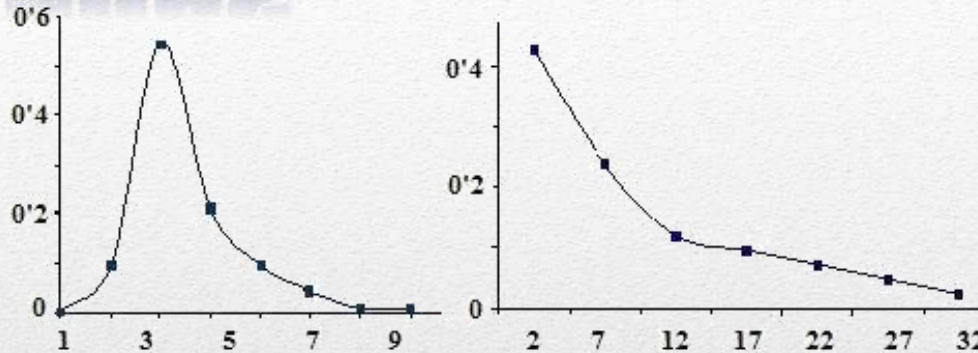
□ randomly diluted



□ scale invariant connectivity, etc.



# Redes



Probabilidad de nodo con  $k$  conexiones, para (izquierda) conexiones terrestres gran capacidad en 2010 (Minsiterio de Fomento) y (derecha) red conexiones aéreas en 2005 (AENA).

www: nodos = sitios web con “hipervínculos” direccionales:  $p(k) \sim k^{-\alpha}$ ,  $\alpha \approx 2$

Se interpreta consecuencia de “principio de enlace preferencial” (el rico tiende a hacerse más rico, o enlázate con lo más popular), q también en otros contextos.

Sea inicialmene página, conectada a sí misma. En unidad tiempo, se crea otra con enlace saliente. Con cierta prob., a cualquiera de las existentes uniformemente al azar. Con la prob. complementaria, a otra elegida proporcionalmente al nº de enlaces entrantes q tiene.

Si el nuevo nodo se enlazara a uno de los antiguos al azar, obtendríamos distribución exponencial.

En aplicaciones a biología veremos con detalle modelo con estas propiedades



# Redes

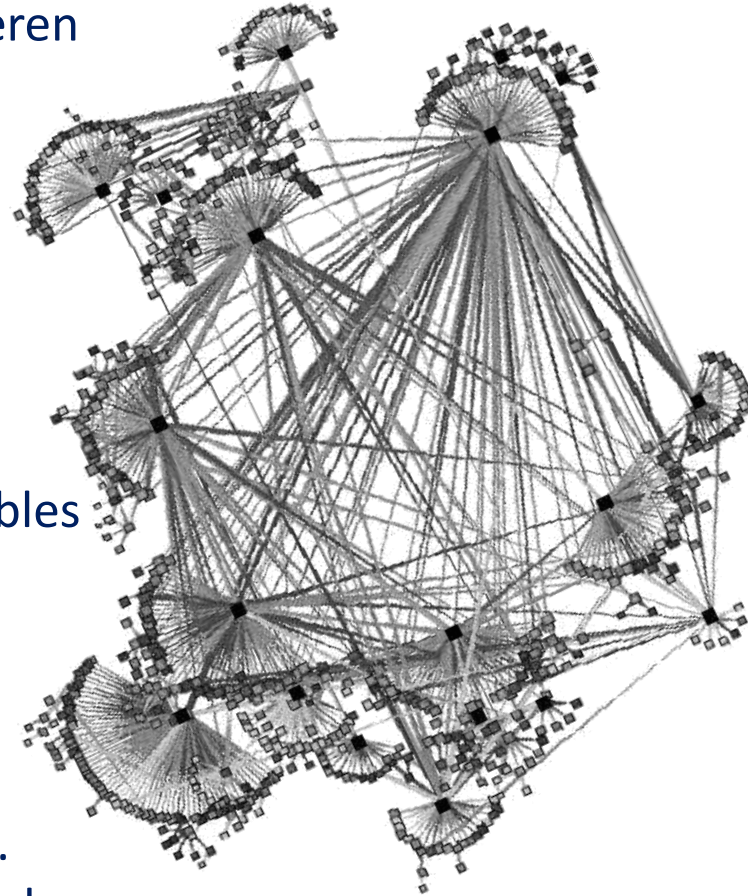
www especie de vástago de internet, pero difieren esencialmente:

**Internet** relaciona "encaminadores" q controlan el paso de "paquetes" entre ordenadores. Diferencias:

ordenadores se relacionan mediante líneas físicas, mientras q hipervínculos son insensibles a la lejanía y complejidad de caminos

internet crece por su cuenta, sin criterio evidente como el de enlace preferencial.

Sin embargo, **internet** dominada por leyes pot. con  $\alpha \approx 2$ , indicando pocos nodos muy conectados



# Redes

## Propiedades de estas topologías.

Intuición aparentemente sugiere que sistemas complejos, frágiles —muchas partes, q pueden averiarse— pero no, ej., internet es robusta: aunque ~3% encaminadores típicamente fuera servicio (como conste. aleatorio encender y apagar de estrellas), la malla permanece globalmente en funcionamiento, insensible a ataques y averías.

Flexibilidad es consecuencia de que su estructura es insensible a la escala.

Ej.: en percolación , invariancia de escala para  $\rho = \rho_c$ , esto es, cuando por 1ª vez aparece clúster gigante. Hay que suprimir entonces muchos nodos al azar para separar eso en “islas” desconectadas . Pero  $\rho_c = f(\alpha)$  y:  $\rho_c = 1$  si  $\alpha < 3$  : en estos casos hay que suprimir casi todos nodos para impedir conectividad.

Intuitivamente: al suprimir, afectamos con más prob. la conectividad dentro de un dominio (nodos enlazados a uno dado) que entre hubs.

Este tipo de mallas es frágil a la clausura hubs, que anula todo su dominio e impide conexión con otros hubs, como es familiar en tráfico aéreo.

Nodos principales han de estar bien protegidos!



# El mundo es un pañuelo

**Experimento psicólogo Stanley Milgram** (1933): hace cartas en 1967 para corredor bolsa en Boston (Massachusetts); las da al azar a desconocidos en Nebraska (a 2500 km, luego lejanía social en la época), con la instrucción de hacerlas llegar de mano en mano, siempre a través de personas relacionadas socialmente.

Al no conocer al corredor, mejor estrategia: pasarla a socialmente próximos al destinatario, quizás a amigo empleado de banca, o a conocido en Massachusetts.

**Resultado:** número razonable de las cartas llegó a destino, con la sorpresa de que sólo habían pasado por seis manos de media.

Intuitivo: sean  $N$  personas con media de  $k$  amigos o conocidos. Si es red aleatoria de grado  $k$ , hay  $\frac{1}{2}Nk$  enlaces distribuidos al azar entre los  $N$  nodos.

Si María tiene  $k$  conocidos en promedio, y cada uno otros  $k$ , etc, María tiene  $k^2$  segundos conocidos,  $k^3$  terceros conocidos, etc, luego basta con  $k \simeq 43$  para tener toda la población mundial en cinco saltos, pues  $k^6 = 6 \times 10^9$ .

Se define el diámetro del grafo,  $D =$  distancia necesaria para alcanzar cualquiera de los  $N$  nodos, ee,  $k^D = N$ , luego  $D = \log N / \log k$

---



# El mundo es un pañuelo

Dos efectos compiten:

- redes aleatorias, "raras": los conocidos de María suelen conocerse, luego superposición de dominios, y 2º conocidos  $\ll k^2$  en situaciones realistas
- las redes reales muestran tendencia al agrupamiento que implica una mayor y más eficaz conectividad que si fueran aleatorias.

En todo caso, hoy se admite "principio de los 6 grados": dos cualquiera se relacionan a través de unas 5 relaciones consecutivas de amistad o trato.

No demostrado pero parece característica general de nuestras relaciones; "el mundo es un pañuelo" = facilidad con la que encontramos amigos de amigos de nuestros amigos.

New York Times en 21F 1998: mostró cómo implicar de este modo a notables personalidades entre las relaciones de Mónica Lewinsky.

El diseño de conexiones aéreas busca minimizar la distancia  $D$ .

Estudios sugieren que  $D$  pequeña en redes naturales debido a hubs; saltando entre hubs, llegamos rápidamente a cualquier dominio, lo que se traduce en esa inesperada cercanía entre nodos lejanos.

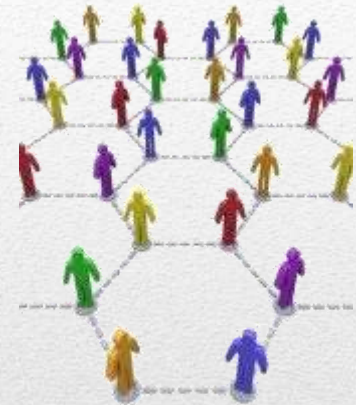
---

# El mundo es un pañuelo

## Trabajo de María Ramos Vázquez, curso 2011-2012

Hace mismo experimento de Milgram, con 16 mensajes para un mismo destinatario, de los q llegan 7 a destino

	Alfredo Pérez Rubalcaba	Secretario general del Partido Socialista Obrero Español.	5
	Almudena Grandes Hernández	Escritora madrileña reconocida internacionalmente.	4
	Albert Oliver Campos	Jugador de baloncesto del equipo Joventut de Badalona	9
	Laura Kim Kim	Medallista de oro Taekwondo	3
	Gwyneth Paltrow	Actriz americana residente en Londres	5
	Raúl Bravo Sanfélix	Antiguo jugador del Real Madrid C.F.	4
	Ginés García Millán	Actor español	4



Resultado: grado medio de separación: 4,86 (estudios recientes: 4,74)



# El mundo es un pañuelo

Somos varios miles de millones poco relacionados, pero organizados *a lo* “mundo pequeño”: formamos grupo reducidos mucha conectividad que se relacionan débilmente con el exterior, a través de *hubs*.

Importante saberlo pues algunas enfermedades y comunicación propaga entre individuos y esta estructura ocurre en otros muchos casos.

- distancia entre 2 páginas web (nº clicks para ir de una página a la otra) = 19;
- encaminadores en internet = 10;
- cerebro y algunas redes de distribución, parecido

Se define también el coeficiente de agrupamiento:

$c$  = fracción media parejas de vecinos de un nodo que son también vecinos entre sí

Si la conexión es total,  $c = 1$  (todos relacionados con todos)

$c = k/N$  en red aleatoria y, como  $N \gg k$ ,  $c \simeq 0$  en este caso sin agrupamiento

redes reales tienen  $c$  entre estos dos extremos:

$c \simeq 0.3$  y  $D \simeq 3$  en red de neuronas

$c \simeq 0.1$  y  $D \lesssim 19$  en red de distribución eléctrica

---

# El mundo es un pañuelo

En la práctica, las propiedades de las redes se complican pues las conexiones son altamente heterogéneas y cambian con  $t$  :

transporte (frecuencia viajes, nº viajeros),

redes tróficas (flujos de materia y energía entre organismos vivos que se nutren unos de otros),

cerebro (intensidades sinápticas), etc.

---



# Ejercicios, referencias interesantes y comentarios

en la web de la asignatura: 

Sobre problemas de grafos de Euler: [www.infovis.net](http://www.infovis.net)

Acerca de redes:

Steven H. Strogatz, “Exploring complex networks”, *Nature* **410**, 268 (2001)

*Linked: The New Science of Networks*, de Albert-László Barabási, publicado por Perseus Pub., Cambridge, MA 2002

“Models of the Small World”, por Mark E.J. Newman, *Journal of Statistical Physics* **101**, 713 (2000)

información y otros enlaces, en [pages.physics.cornell.edu](http://pages.physics.cornell.edu).

Ricardo Baeza-Yates, Carlos Castillo y Vicente López han publicado “Características de la Web de España”, en *El profesional de la información* **15** (número 1), 6 (2006)

---

# Homogeneidad

Estudio pts. críticos y sus propiedades, incl. GR  $\rightarrow$  rasgos fascinantes. naturaleza. Teoría de Michael E. Fisher (1931), Leo Kadanoff (1937), Kenneth G. Wilson (1936) y otros profundiza en esto y lleva a importantes desarrollos. Veámoslo.

- $f(x)$  homogénea en  $x$  si  $f(\lambda x) = \lambda^a f(x)$ , con  $a =$  número,  $\forall$  valor parám.  $\lambda$

Ej,  $f(x) = cx^2$  es homogénea pues  $f(\lambda x) = c(\lambda x)^2 = c\lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(x)$ .

Suficientemente cerca de los pts. críticos, las funciones que representan ciertas magnitudes físicas generales (energía, entropía, magnetización,...) tienen esta propiedad respecto de sus argumentos naturales, ej.,  $T$  y  $H$ .

- Sin demostrar en general, se admite como **hipótesis de homogeneidad** q complementa y extiende a mundo fenom. críticos las 3 leyes Termo

Ej. de esta extensión: homogeneidad  $\Rightarrow$  **relaciones de escala** como  $\nu d = \beta(\delta+1)$  donde  $\nu, \beta, \delta$  son exponentes críticos y  $d$  es la dimensión sistema.

**Hipótesis de partida muy general, luego relaciones de escala han de serlo, lo que se confirma en experimentos: ¡Universalidad y escala!**

---



### 10.3. EXPONENT INEQUALITIES

A first attempt at finding some underlying order in the critical indices was to look whether thermodynamical arguments could provide any relations among them. The result of these investigations is only partly rewarding: Thermodynamics provides *inequalities*, but no equality allowing one to reduce the number of independent indices. These inequalities are consequences of the thermodynamic stability conditions, the best known of which is the nonnegative character of the specific heat.

Let us derive in detail the simplest of these inequalities, due to Rushbrooke (1963). We start with the following identity for the derivatives of the entropy of a magnetic system:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \quad (10.3.1)$$

On the other hand, we note the following identity from the theory of implicit functions:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H = -1 \quad (10.3.2)$$

Using, moreover, the Maxwell relation:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M = -\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T \quad (10.3.3)$$

we find

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \quad (10.3.4)$$

No es imprescindible para lo que sigue el conocer esta propiedad, pero es útil, pues es la primera evidencia histórica de que algo interesante pasaba en los puntos críticos; ver y seguir bibliografía

Using now the definition (9.1.5) together with the definition of the specific heats at constant field or constant magnetization:

$$c_M = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_M, \quad c_H = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H \quad (10.3.5)$$

we find the thermodynamic relation:

$$\kappa_T (c_H - c_M) = T \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2 \quad (10.3.6)$$

We now introduce the stability conditions:

$$c_M \geq 0, \quad \kappa_T \geq 0 \quad (10.3.7)$$

This then implies

$$c_H \geq T \kappa_T^{-1} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2 \quad (10.3.8)$$

Consider now a system at zero magnetic field and at a temperature slightly below  $T_c$ . From the definitions (9.5.12)–(9.5.14) of the critical indices we deduce

$$A(-\theta)^{-\alpha'} \geq T_c A'(-\theta)^{\gamma' + 2(\beta - 1)} \quad (10.3.9)$$



We now note that if  $f(x) \geq g(x)$ , then  $\ln f(x) \geq \ln g(x)$ . If  $x < 1$ , then  $\ln x < 0$ , and therefore

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq \frac{\ln g(x)}{\ln x}$$

with the inequality sign reversed. But if  $f(x) = Ax^\alpha$ , then

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \alpha$$

Therefore, (10.3.9) implies

$$-\alpha' \leq \gamma' + 2(\beta - 1)$$

or

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \tag{10.3.10}$$

This is *Rushbrooke's inequality* relating three critical indices. It is quite general, following directly from the thermodynamic stability condition, which is valid for all physical systems.

Other inequalities can be derived under various conditions; their proof is, however, often more delicate. An inequality as general as Rushbrooke's, as it is solely based on a convexity theorem for the free energy, was derived by Griffith:

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2 \tag{10.3.11}$$

Further inequalities can be found only if stronger assumptions are made about the system. To quote an example, if it is assumed that

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H &\leq 0 && \text{for } \mathcal{H} \geq 0, \\ \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \mathcal{H}^2}\right)_T &\leq 0 && \text{for } \mathcal{H} \geq 0, \\ \alpha &\geq \alpha' && \end{aligned} \tag{10.3.12}$$

then one can show that

$$\gamma' \geq \beta(\delta - 1) \tag{10.3.13}$$

The conditions (10.3.12) have been suggested by the Ising model, where they are satisfied; whether they are generally valid for real systems however, is not known.

Another interesting group of inequalities relates the macroscopic to the microscopic critical exponents. Here again we need additional assumptions that are valid in the Ising model, but not necessarily for real systems. These assumptions are: the positivity of the correlation functions and the monotonicity of these functions both with temperature and with magnetic field. Under these conditions, Fisher derived the inequality:

$$(2 - \eta)\nu \geq \gamma \tag{10.3.14}$$



Another relation interrelates a microscopic and a macroscopic index to the dimensionality of the system:

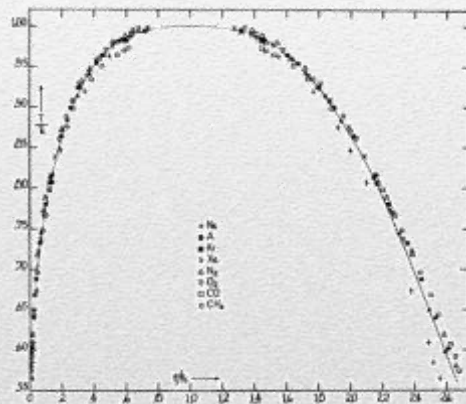
$$d \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \geq 2 - \eta \quad (10.3.15)$$

We shall not exhaust the list of known inequalities here. We note only that thermodynamics alone does not allow us to decrease the number of independent critical exponents. However, the two general inequalities (10.3.10) and (10.3.11) provide us with a quite useful consistency test. For instance, if experimental data are available for  $\alpha'$ ,  $\beta$ , and  $\delta$  for a given system, these data are necessarily obtained from quite different types of measurements. If these data violate Eq. (10.3.11), something must be wrong with some one of the experiments, because this inequality is a general thermodynamic result. We cannot, however, draw such conclusions from the violation of the other inequalities, which may simply imply that the additional conditions are not satisfied for that particular system.

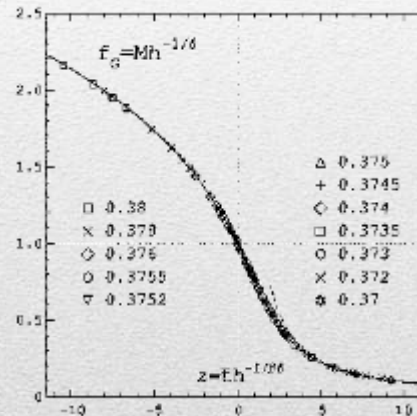
The reader will be tempted, of course, to check these inequalities with the numerical data of Table 10.1.1. The striking fact that then becomes apparent is that, as well for the classical theories as for the two-dimensional Ising model and for the spherical model, they hold as equalities, although the individual critical indices are quite different. Moreover, the experimental data also seem to combine quite closely, within the error limits, to yield equalities. This puzzling feature gave rise to further development and attempts at explanation, which will be considered in the next sections.

# Homogeneidad

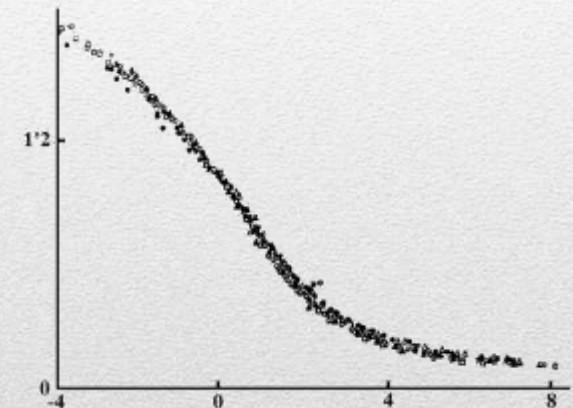
Homogeneidad también  $\Rightarrow$  ecs. de estado entre magnitudes fundam. como  $M$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $V$  y  $T$  han de ser sencillas e idénticas para cada clase de universalidad. Ej, homogeneidad predice el comportamiento universal que muestran los datos en:



Universal scaling near liquid gas transition for 8 different liquids, Guggenheim



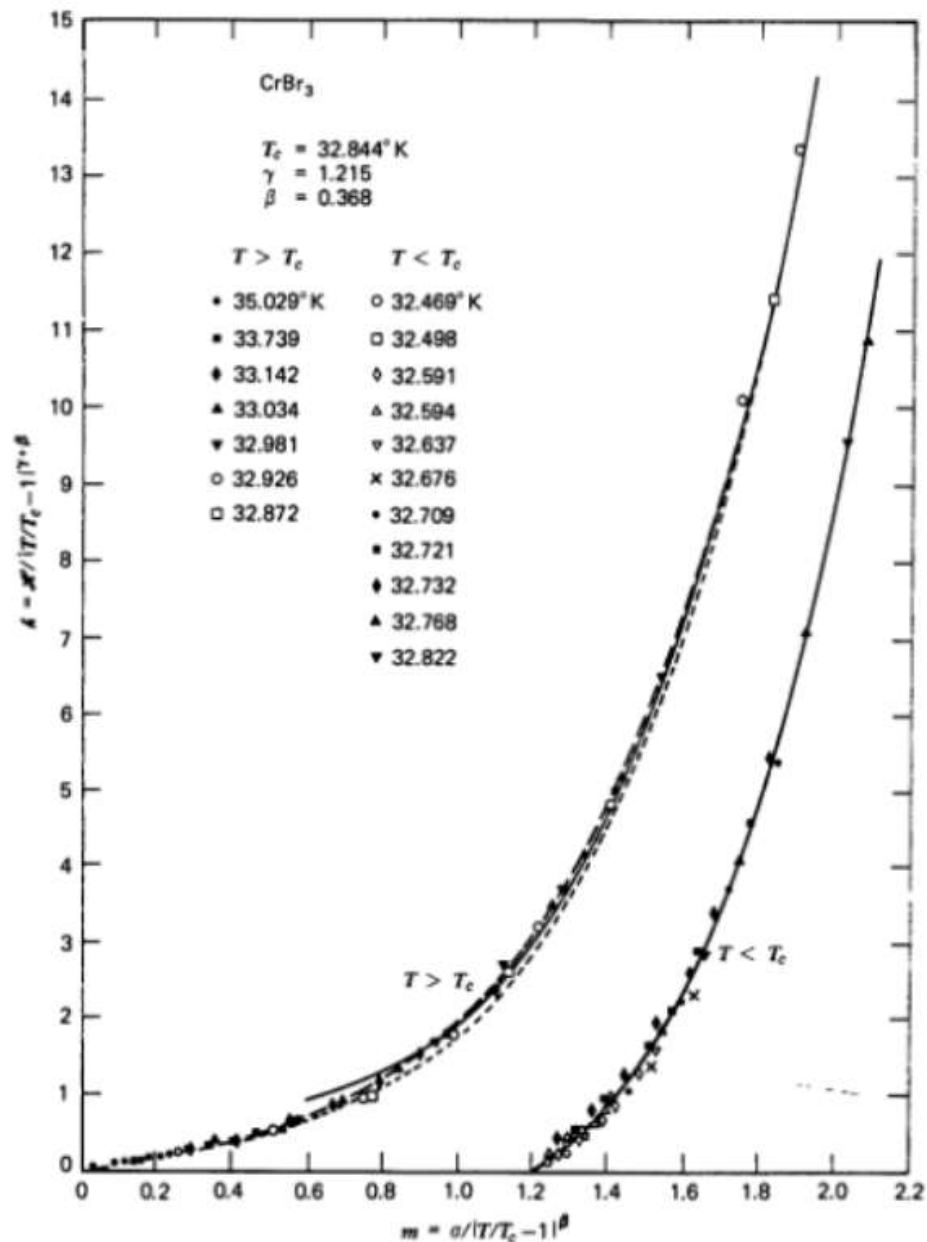
Eq. of state, as indicated, for ferromagnetic Ising system; different values of  $1/T$



Escala  $m$  para un  $h$  campo vs. temp.  $\epsilon$  (u. reducidas), para 5 materiales microscópicamente diferentes.

Esto es, reduciendo variables  $h$ ,  $m$ ,  $P$ ,  $V$ ,... de modo q describan separación relativa pto. crítico, ej.,  $m = \epsilon^{-\beta} M$  y  $h = \epsilon^{-\beta\delta} H$ ,  $\epsilon \equiv |T - T_C|/T_C$ , con  $T_C$ ,  $\beta$  y  $\delta$  del material en cuestión,  $\rightarrow$  curva única, mismo comportamiento cerca pto. crítico, para todo sist. q satisfaga la homogeneidad supuesta. **Predicción confirmada espectacularmente.**

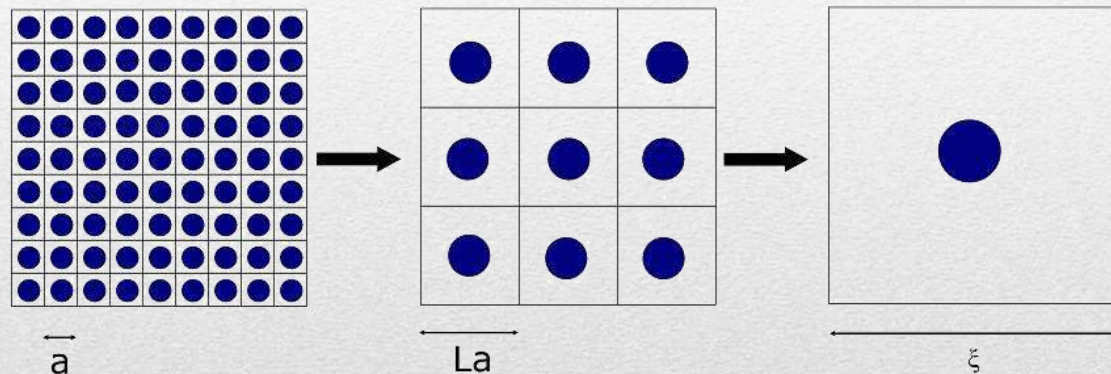




**Figure 10.4.1.** Scaled magnetic field versus scaled magnetization. Experimental data for the ferromagnet  $\text{CrBr}_3$ . [After J. T. Ho and J. D. Litster, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 603 (1969).]

# Homogeneidad

Para comprender qué hay tras estos hechos, sea el modelo de Ising con estados en los nodos de una red 2D  $s = \pm 1$  y procedemos como en figura:

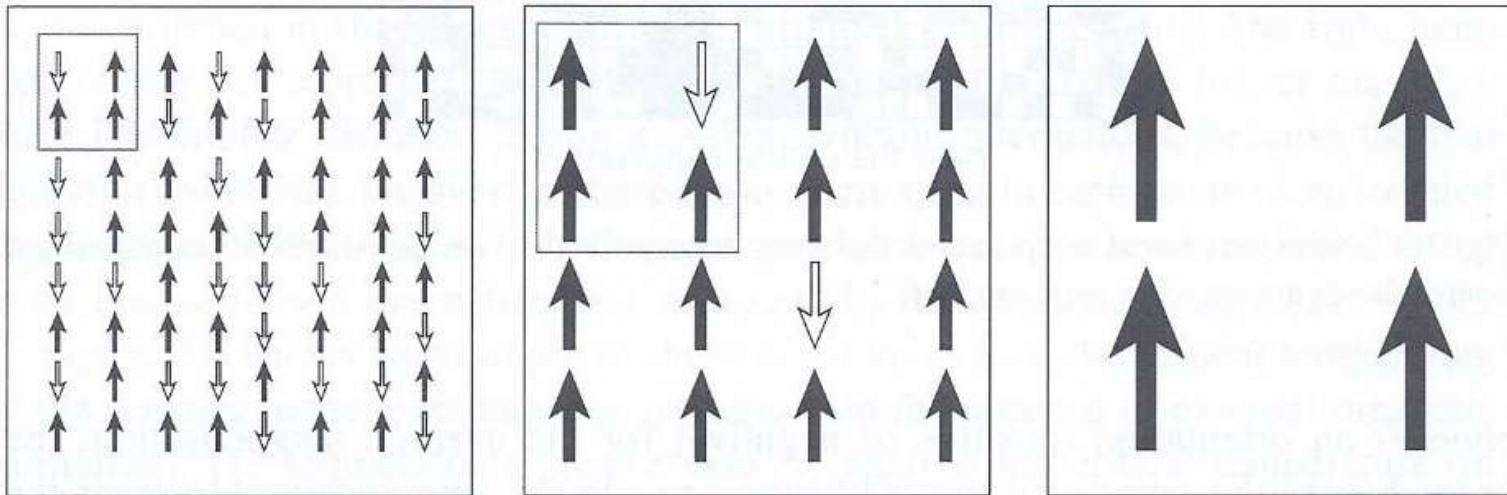


**Construcción de Kadanoff**, que agrupa espines conservando las simetrías esenciales del problema.

Agrupando, conservando simetrías, red celdas lado  $a$  produce bloques lado  $La$ . Esta *contracción* es repetible cerca del pto. crítico, pues  $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \gg La$  y se tiene  $L \gg a$ . Podemos entonces asociar a cada bloque variable  $\sigma$  q resume efecto de todas las  $s$  que contiene: posible pues separación entre espines dentro del bloque  $\gg \xi \Rightarrow$  fuertemente correlacionados ( $\Rightarrow$  si  $J > 0$ , espines en cada bloque apuntan predominantemente hacia arriba o hacia abajo que puede expresarse mediante PO local  $\sigma$ )



# Homogeneidad



**Fig. 3.3** To represent the effect of changing the scale of magnification of the microscope, Leo Kadanoff suggested grouping spins by blocks and replacing the block by a “super-spin”. Then we repeat this procedure *ad infinitum*. There are different methods to attribute the orientation of the super-spin as a function of the orientations of the spins in the block (see text)

# Homogeneidad

Podemos ahora relacionar la física de celdas con la de bloques y ésta con las propiedades globales.

A nivel macroscópico interesa

- Magnetización = promedio de las  $s$  en sistema:  $M = E[s]$ , y
- función de correlación:  $C = E[s_r s_0]$ .

Pero, si nada ha cambiado al ir de celdas a bloques, también ha de ser  $M = E[\sigma]$  y  $C = E[\sigma_r \sigma_0]$ .

En términos más generales:

si  $\exists$  universalidad en el sentido propuesto, las  $\sigma$  han de dar una descripción equivalente a las  $s$  y, en las condiciones descritas, la escala  $L$  que adoptemos ha de ser un detalle irrelevante, ee,

**¡No hay escala!**

Al hacerse  $\xi \rightarrow \infty$ , la física es insensible a cambios de  $L$ .

---



# Homogeneidad

Esto íntimamente relacionado con homogeneidad; en efecto:

- La suma de las  $s$  en un bloque ha de igualar su  $\sigma$  de donde se sigue que, para no modificar el problema original, ha de ser  $s = L^{a-d} \sigma$ .
- Además, distancias se reducen  $r' = r/L$  al cambiar de escala, y las funciones  $M(\varepsilon, h)$  y  $C(\varepsilon, h)$  originales han de conservarse en los bloques, luego escribimos  $M(\varepsilon', h')$  y  $C(\varepsilon', h')$ .
- En otras palabras, estamos suponiendo que la temperatura y el campo (relativos al pto. crítico) se transforman  $h \rightarrow h'$  y  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ , pues las  $\sigma$  responderán distinto a los estímulos, ee,  $\sigma$  “nota” que campo e interacción  $J$  con vecinos han cambiado (lo q modifica  $T_c$ , luego  $\varepsilon$ ).

Puesto que  $h' \rightarrow 0$  a la vez que  $h \rightarrow 0$ , y  $\varepsilon' \rightarrow 0$  a la vez que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y  $L$  es parámetro de cambio al pasar de celdas a bloques, lógico escribir relaciones  $h' = L^a h$  y  $\varepsilon' = L^b \varepsilon$  si buscamos máxima sencillez, y estas transformaciones expresan precisamente q  $M$  y  $C$  funciones homogéneas en sus argumentos

---

# Homogeneidad → renormalización

## Consecuencias:

1. en condiciones descritas, abstracta homogeneidad se reduce a universalidad (generalmente confirmada), y
2. no escala en pto. crítico, lo que ha guiado interesantes desarrollos dentro y fuera de la física
3. Ausencia de escala, poder predictivo al notar pto. crítico es pto fijo, solución principal de unas ecs. dif., ***transformaciones del grupo de renormalización***, para variaciones  $h(L)$  y  $\varepsilon(L)$  (Wilson, Nobel 1982).

Teoría no rigurosa (hipótesis de alcance no bien determinado) pero planteamiento microsc., generaliza y da coherencia a otros desarrollos, permite cálculos explícitos que se confirman, e intuición física.

Al formular teoría en términos de ecs q realizan la falta de escala, traspasa el planteamiento físico inicial (equilibrio term.), y sugiere que ha de esperarse homog., univers. e invariancia escala de aplicación a sistemas complejos

---



# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

Wilson reformuló las ideas de Kadanoff de modo muy original para mostrar que las leyes de escala y el principio de universalidad pueden deducirse más económicamente, abriendo nueva perspectiva en el estudio de fenómenos críticos que  $\rightarrow$  cálculos explícitos (Nobel 1982)

- Sea la función de partición de Ising,

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + h \sum_i s_i\right)$$

donde  $K = J/k_B T$ ,  $h = \mu H/k_B T$ , y

definimos clase de modelos con esta FP pero con  $K_L$  y  $h_L$  dependiendo de un parámetro de escala  $L$

construcción Kadanoff es ej., pero ahora  $L$  no sujeto a condiciones respecto de  $\xi$  y  $a$  ni ha de ser entero (puede variar cont. de 0 a  $\infty$ )

---

# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

- Suponemos, con Kadanoff, que todos los modelos de esta clase tienen mismas propiedades termodinámicas cerca pto. crítico. En particular, entalpía libre por espín, misma para todos, luego

$$G(K, h) = L^{-d} G(K_L, h_L) \quad (K \text{ juega aquí papel de } T \text{ inversa})$$

y la long. correl. ha de escalar entonces  $\xi(K, h) = L \xi(K_L, h_L)$

Para tener algo útil, necesitamos expresiones para  $K_L$  y  $h_L$ :

- Kadanoff las sugirió intuitivamente ( $h' = L^x h$ , etc.) pero ahora escribimos ecs. diferenciales con el siguiente argumento:

Cambios relativos, como con Kadanoff, pueden depender del origen pero no explícit. de  $L$ :  $K_{2L} = f(K_L, h_L)$  y, para un cambio infinitesimal  $L \rightarrow (1+\delta)L$ :

$$K_{L+L\delta} - K_L = \delta L \left( \frac{dK_L}{dL} \right) + \dots \equiv \delta u$$

---



# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

$$K_{L+L\delta} - K_L = \delta L \left( \frac{dK_L}{dL} \right) + \dots \equiv \delta u$$

- donde  $u$  no depende explícitamente de  $L$  sino de  $K_L$  y  $h_L$  (de hecho, de  $h_L^2$  pues problema insensible a cambio signo de  $h_L$ ) y pueden escribirse:

$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{1}{L} u(K_L, h_L^2) \quad \frac{dh_L}{dL} = \frac{1}{L} h_L v(K_L, h_L^2)$$

- ecs dif. q definen un **grupo de transformaciones de escala** (análogo al de traslaciones en mecánica clásica) y se conocen como **ecs. del grupo de renormalización** (RG) donde, para q más operacionales, se supone  $u$  y  $v$  analíticas de  $K_L$  y  $h_L^2$  incluso en pto. crítico (a pesar de lo cual, surgirán las singularidades críticas naturales).
-

# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

- Sup. estamos en  $L = 1$  ligeram. encima pto crítico,  $K \lesssim K_C, h \gtrsim 0$ .

Aumentamos  $L$ . Se sigue de  $\xi(K, h) = L \xi(K_L, h_L)$  que  $\xi_L \equiv \xi(K_L, h_L)$  disminuye pues  $\xi = L \xi_L = \text{const.}$  Independ. de  $L$ . Pero disminuir  $\xi$  quiere decir separarse de pto crítico, luego  $K$  todavía se hace menor que  $K_C$ .

- Si lig. debajo,  $K \gtrsim K_C$ , y aumenta  $L$ , también separamos del crítico
- ¿Y si estamos justo en  $K = K_C, h = 0$ , donde  $\xi(K_C, 0) = \infty$ ?

Al aumentar  $L$ ,  $\xi(K, h) = L \xi(K_L, h_L) \Rightarrow \xi(K_L, h_L) = \infty \quad \forall L$  finito, luego la sol. de las ecs. del RG para el valor inicial  $K = K_C, h = 0$ , es:

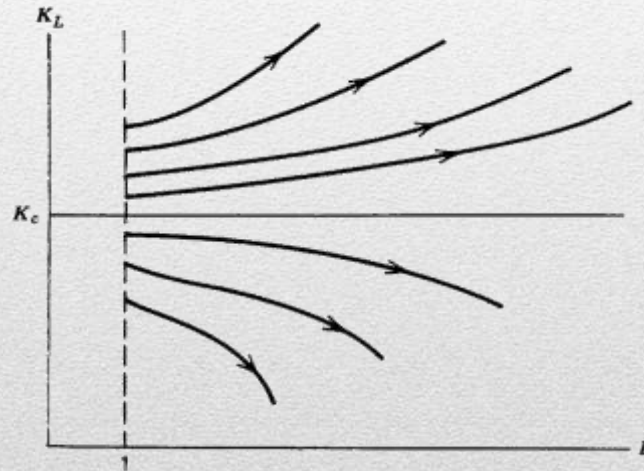
$K_L = K_C, h_L = 0$ , independiente de  $L$ . (Notamos q  $h_L = 0$  automáticamente sol. est. de la 2ª ec. RG; para que  $K_L = K_C$  satisfaga la 1ª, ha de ser  $u(K_C, 0) = 0$ .)

---



# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

Resumiendo, si sist. inicialmente a “temperatura” (inversa)  $K$  (y, por sencillez,  $h = 0$ ), escalarlo hacia arriba  $\rightarrow$  necesariamente separación del pto crítico, salvo si en él, en cuyo caso permanece allí:



- Pto crítico = pto fijo inestable de las ecs. RG, como alto de colina.
  - $K_C$  aparece como singularidad, aunque las ecs son analíticas: si dos sist. parten muy próximos del mismo lado, juntos para cualquier  $L$ , pero se separa rápidamente si próximos pero lados distintos de  $K_C$ .
-

# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

Las ecs pueden ahora resolverse linealizando alrededor del pto fijo.

En primera aproximación: 
$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{1}{L} (K_L - K_c) y$$

$$\frac{dh_L}{dL} = \frac{1}{L} h_L x$$

donde  $y = \frac{\partial u}{\partial K}(K_c, 0)$  y  $x = v(K_c, 0)$  (números bien definidos dada analiticidad de  $u$  y  $v$  en el pto crítico) **cuya solución es:**

$$\varepsilon_L \equiv K_c - K_L = \varepsilon L^y \quad h_L = h L^x \quad (\varepsilon = K_c - K > 0; h > 0)$$

con la condición  $K_{L=1} = K$ ,  $h_{L=1} = h$ .

---



# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

A partir de esas soluciones, calculemos el valor  $L'$  de  $L$  para el que se alcanza un valor cualquiera de  $K_L$ , por ejemplo,  $K_L = \frac{1}{2}K_C$ :

$$L' = (K_C/2\varepsilon)^{1/y}, \text{ donde } h_{L'} = h(K_C/2\varepsilon)^{x/y}$$

y la entalpía libre y la longitud de correlación son

$$G(K, h) = \left(\frac{K_C}{2\varepsilon}\right)^{-d/y} G\left[\frac{K_C}{2}, h\left(\frac{K_C}{2\varepsilon}\right)^{x/y}\right] \quad \xi(K, h) = \left(\frac{K_C}{2\varepsilon}\right)^{1/y} \xi\left[\frac{K_C}{2}, h\left(\frac{K_C}{2\varepsilon}\right)^{x/y}\right]$$

Si medimos la separación del pto crítico con  $\theta \equiv (T-T_C)/T_C$ , que es proporcional a  $\varepsilon$  si  $T \approx T_C$ , esas ecs pueden escribirse

$$G(\theta, h) = \theta^{d/y} \psi(h\theta^{-x/y}) \quad \xi(\theta, h) = \theta^{-1/y} \zeta(h\theta^{-x/y})$$

donde  $\psi$  y  $\zeta$  son funciones universales; ecs equivalentes a las de escala de Kadanoff, con

$$x = d \frac{\beta + \gamma}{2\beta + \gamma}, \quad y = d \frac{1}{2\beta + \gamma}$$

---

# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

Interesante ahora generalizar un poco lo anterior imaginando que  $G$  y  $\xi$  dependen de  $q$ , un tercer parámetro del hamilt. (una de las variables “irrelevantes” de Kadanoff), ej., la relación entre los parámetros de acoplamiento entre NN y NNN. Las ecs son ahora:

$$G(K, h, q) = L^{-d} G(KL, hL, qL) \quad \xi(K, h, q) = L \xi(KL, hL, qL)$$

- Extendiendo el argumento, tenemos sist. de tres ecs. RG:

$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{1}{L} u(K_L, q_L, h_L^2)$$

$$\frac{dq_L}{dL} = \frac{1}{L} w(K_L, q_L, h_L^2)$$

$$\frac{dh_L}{dL} = \frac{1}{L} h_L v(K_L, q_L, h_L^2)$$

- Al tener variable adicional  $q$ , línea de ptos críticos,  $\xi(K_C, q, 0) = \infty$ , esto es, una temperatura crítica,  $K_C(q)$ , para cada  $q$ .
-



# Renormalización — Wilson formula la teoría de Kadanoff

Sigue siendo cierto que, si inicialmente  $K$ ,  $q$  y  $h$  están en la línea crítica, seguirá en ella para cualquier  $L$ , esto es,  $K_L = K_C(q_L)$  y  $h_L = 0$ , y la 2ª ec RG se reduce a

$$dq_L/dL = L^{-1}w_C(q_L) \equiv L^{-1}w[K_C(q_L), q_L, 0]$$

Para  $L \rightarrow \infty$  esta ec predice que  $q_L$  tiende a un límite  $q_C$ , o bien va a infinito, u oscila.

Si suponemos lo primero, y es inicialmente  $K = K_C \equiv K_C(q_C)$ ,  $q = q_C$ ,  $h = 0$ , se sigue lo mismo para cualquier  $L$ , luego es pto fijo de todo el grupo.

---

We now discuss again the behavior of the solutions in the neighborhood of the fixed point, in which case the equations reduce to

$$\begin{aligned}L \frac{dK_L}{dL} &= y_{11}(K_L - K_c) + y_{12}(q_L - q_c) \\L \frac{dq_L}{dL} &= y_{21}(K_L - K_c) + y_{22}(q_L - q_c) \\L \frac{dh_L}{dL} &= xh_L\end{aligned}\tag{10.6.16}$$

The third equation being decoupled from the first two, we may discuss the latter separately. These two equations possess in general two linearly independent solutions:

$$K_L - K_c = L^y, \quad q_L - q_c = r_y L^y \tag{10.6.17a}$$

$$K_L - K_c = L^z, \quad q_L - q_c = r_z L^z \tag{10.6.17b}$$

Hence, the general solution is a linear combination of these:

$$\begin{aligned}K_L &= K_c - \varepsilon L^y + \eta L^z \\q_L &= q_c - \varepsilon r_y L^y + \eta r_z L^z \\h_L &= h L^x\end{aligned}\tag{10.6.18}$$

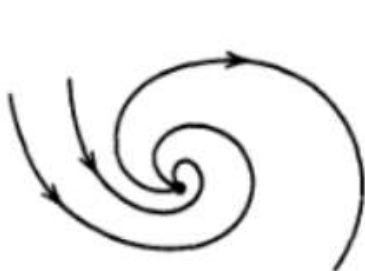




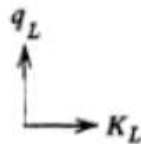
(a) Node:  $y < 0, z < 0$



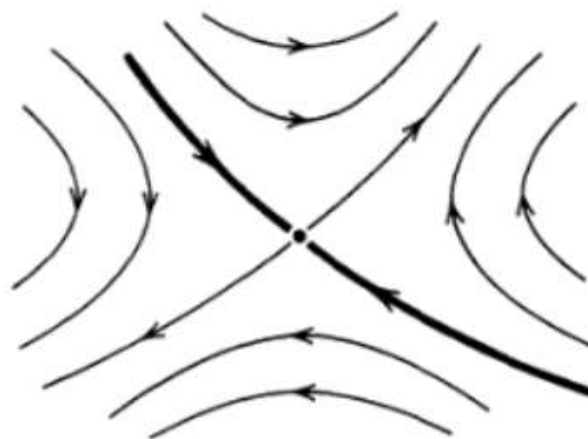
(b) Node:  $y > 0, z > 0$



(c) Focus:  $y, z$  complex



(d) Limit cycle:  $y, z$  complex



(e) Saddle point:  $y > 0, z < 0$

Various types of fixed-point singularities of the RG equations.

where  $\varepsilon$  and  $\eta$  depend on the initial ( $L = 1$ ) data:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{r_z(K - K_c) - (q - q_c)}{r_y - r_z} \\ \eta &= \frac{r_y(K - K_c) - (q - q_c)}{r_y - r_z}\end{aligned}\tag{10.6.19}$$

We take first  $h = h_L = 0$ . It is customary in the theory of differential equations to represent the solutions by drawing trajectories in the  $K$ - $q$  plane: these trajectories are oriented in the sense of increasing  $L$ . The nature of the singular fixed point depends on the values of the parameters  $y$  and  $z$ . Some of the possibilities are shown in Fig. 10.6.2.

We now show that only one of these is consistent with our picture. Indeed, we first note as described above, that if initially  $K = K_c(q)$  then  $K_L \rightarrow K_c$ ,  $q_L \rightarrow q_c$  as  $L \rightarrow \infty$ . This behavior rules out the cases (b) and (d) of Fig. 10.6.2, because there is no trajectory going into the singular point. On the other hand, Eq. (10.6.13b) requires that if initially  $K \neq K_c(q)$ , then as  $L$  increases we must move away from the critical line. This condition rules out the cases (a) and (c) in which all trajectories eventually go into



the critical point. We are thus left with the saddle-point singularity. In this case the fixed point can only be reached if the system starts on the single trajectory drawn in a heavy line: This trajectory is thus identified with the critical line  $K = K_c(q)$ . Note that the equilibrium point will be reached whatever the initial value of  $q$ : the parameter  $q$  indeed appears as an "irrelevant variable." To sum up, we have shown that "*normal critical behavior*" can only be described by a set of RG equations possessing a fixed point of saddle-point type. This implies that  $y > 0$ ,  $z < 0$ .

Coming back now to the solution (10.6.18), we proceed as before, starting with values of  $K$ ,  $q$  near the critical line and calculating the value  $\bar{L}$  for which  $K_{\bar{L}}$  is certainly a large number. The term proportional to  $\eta$  in the first two equations (10.6.18) is quite small because  $z < 0$ : it can therefore be neglected. We then find, as in Eq. (10.6.9),

$$\bar{L} = \left( \frac{K_c}{2\varepsilon} \right)^{1/y}$$

For this value of  $L$ , we have

$$\begin{aligned} q_{\bar{L}} &= q_c - r_y \left( \frac{K_c}{2} \right) \\ h_{\bar{L}} &= h \left( \frac{K_c}{2\varepsilon} \right)^{x/y} \end{aligned} \tag{10.6.20}$$

We note two important features.  $q_L$  is a *constant*, independent of  $\varepsilon$ ,  $q$  or  $h$ ; moreover,  $h_L$  depends on  $h$  and  $\varepsilon$  just as in (10.6.10). Hence, substituting  $K_L = K_c/2$  and Eqs. (10.6.20) into Eqs. (10.6.13) we obtain equations of the *same form* as (10.6.12), the only difference being in the form of the functions  $\psi$  and  $\zeta$ . The critical exponents and the relations among them are the same whether there is a parameter  $q$  or not in the Hamiltonian. *We have therefore obtained not only the scaling laws but also the universality principle as direct consequences of the renormalization-group equations.*



Este tema puede terminar con:

- The renormalization-group equations and the partition function (Balescu p.354)
- The renormalization-group equations and the partition function (Balescu p.361)

La referencia para este tema es Balescu (copiado en ...FiSiCo/renormal), y la web <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/phase/scaling.pdf>

- También pueden verse algunos papers interesante relacionados en: <C:\Users\jmarro\jm\clases\viejo\FisEst\FE Web\reviews\reviews.html>
- **Renormalización en Percolación: libro “Scale Invariance” de Lesne y Laguës, páginas 180- 187 — sería una aplicación sencilla y adecuada** (y en página 187-191 se hace difusión en clúster percolante que puede ser muy interesante, aparte de que en p.112 hablan de auto-similitud del camino browniano que puede ponerse en esta lección).